第一章 凌波理論的介紹

在這一章, 我們簡介凌波方程的理論。 我們從富氏變換著手, 接著由區段富氏變換引入凌波函數, 以及它縮張 (dilation) 及平移 (translation) 的特性, 我們將凌波函數 (wavelet functions) 的型態作簡單的分類, 爲說明凌波函數的重建及分解, 我們給了一個例子 — Daubechies 的凌波函數。 爲建構 Daubechies 的凌波函數, 我們也略述所謂自格函數 (scaling functions) 及多重解分析 (multiresolution analysis)。

§ 1–1 什麼是凌波函數 ?

凌波理論, 是近幾年在計算科學和工程上熱門的話題。 凌波變換 (wavelets transform) 也是一項分割不同頻率的有用工具。 雖然往後文章將侷限於 Daubechies 的凌波函數和 $L^2(\mathbb{R})$ 的空間, 但我們不妨先討論一般的凌波函數及其性質。 假設我們已知 $L^p(\mathbb{R})$ 對 $1 \leq p < \infty$ 是 Banach 空間。

若 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 則定義其富氏變換 (Fourier transform) 如下:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx$$

以上的積分是在整個實數軸上, 往後文章中, 除非特別說明積分範圍, 否則我們都在整個實數軸做積分。 若再加上 f 是連續及 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 中, 則富氏變換的逆變換 (inverse Fourier transform) 爲

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

以上的函數空間是 $L^1(\mathbb{R})$, 若考慮 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 由 Parseval 等式則它滿足 $||\hat{f}||_2^2 = 2\pi ||f||_2^2$, 因此我們將富氏變換看成在 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 的有界線性變換。 再因 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密。 所以即可將此定義用於 $L^2(\mathbb{R})$ 上。 假設 $f(x)$ 看成在時間上的訊息, 則 $\hat{f}(\omega)$ 爲其對頻率的表達式, 但是我們不易從 $\hat{f}(\omega)$ 獲得局部的高

頻。 而且 $e^{-i\omega x}$ 是全域性的, 故富氏變換的影響是全域性的, 換句話說, 若 f 在一個小區間稍稍改變, 則將影響所有 $\hat{f}(\omega)$ 的值。 改進方法有區段富氏變換 (windowed Fourier transform) 如下: 若 $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(T_g^{win} f)(\omega, t) = \int f(x) g(x-t) e^{-i\omega x} dx$$

式中 g 稱爲區段函數 (window function), 其滿足 $xg(x) \in L^2(\mathbb{R})$。 這是一種對固定時間區段, 做頻率展現的標準技巧。

相類似於區段富氏變換式, 在凌波理論中有:

$$(Wf)(a,b) = |a|^{-1/2} \int f(x) \Psi(\frac{x-b}{a}) dx$$

式中我們先假定 $a, b \in \mathbb{R}$ 且令 $\Psi^{a,b} = |a|^{-1/2} \Psi(\frac{x-b}{a})$ 其中 Ψ 要是一區段函數, 則 Ψ 必須在 $L^1(\mathbb{R})$ 中且滿足

(1.1.1). $$\int \Psi(x) dx = 0$$

由 (1.1.1) 我們可觀察出 Ψ 必須上下振動, 且 $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 $|\Psi(x)|$ 在 $|x|$ 大時必須很小。 因此 Ψ 的圖形相對於整個實數軸, 像是小波。 在此稱凌波乃因於我們討論的正規 Daubechies 緊緻函蓋函數, 凌亂卻不失美感; 而且凌字又有逼近的意義, 例如凌晨, 故名凌波函數。 相對於 $\Psi^{a,b}$, Ψ 又稱爲母凌波函數 (mother wavelets)。

§ 1–2 凌波函數的分類

凌波函數的型態大致分成兩大類: $\Psi^{a,b}$ 當 $a, b \in \mathbb{R}$ 爲連續型; $\Psi^{a,b}$ 當 $a = \frac{1}{2^j}, b = \frac{k}{2^j}, j, k \in \mathbb{Z}$ 爲離散型。 在離散型中又分多餘式 (redundant discrete systems) 及正規型 (orthonormal)。

往後我們討論的空間是一個 Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$, 因此有更好的性質。 在連續型中, 一個函數能被它的凌波變換式重建, 亦即

$$f(x) = C_\Psi^{-1} \int\int < f, \Psi^{a,b} > \Psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2},$$

式中 $<,>$ 表示 L^2 的內積。 而 $C_\Psi = 2\pi \int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$. (這裡說明 $\int \Psi(x)dx = 0$ 是必要的。)

在時間及頻率的分析時, 我們通常僅僅對 $a > 0$ 有興趣。 在此它的重建公式寫成:

$$f(x) = 2C_\Psi^{-1} \int_0^\infty [\int < f, \Psi^{a,b} > \Psi^{a,b} db] \frac{da}{a^2},$$

離散型則爲

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \Psi_{j,k} > \widetilde{\Psi}_{j,k}(x) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \widetilde{\Psi}_{j,k} > \Psi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

其中 $\{\Psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\Psi}_{j,k}\}$ 都是 Riesz 基且

$$< \Psi_{j,k}, \widetilde{\Psi}_{l,m} >= \delta_{jl}\delta_{km} \qquad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

稱 $\{\Psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\Psi}_{j,k}\}$ 互爲對偶基底 (dual base)。 若 $\{\Psi_{j,k}\}$ 是正規基, 則 $\widetilde{\Psi}_{j,k} = \Psi_{j,k}$。 還有其它型態上的分類, 但我們不深入討論, 請參考 [5] 及 [10]。

§ 1–3 多重解分析

在正式介紹 Daubechies 的凌波函數之前, 讓我們先瞭解多重解分析。 設 V_j 是一族 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空間且滿足以下條件:

(1) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$

(2) $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密。

(3) $\cap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{\emptyset\}$

(4) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

由以上的四個條件, 我們可知這些空間可以定義一個從 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 到 V_j 的投影算子 (othogonal projection) P_j。 從 (2) 的式子可得知：

$$\lim_{j\to\infty} P_j f = f, \quad \text{for } f \in L^2(R).$$

這裡要說明的是, (2) 這個式子 $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 僅僅稠密在 $L^2(R)$, 不是等於它, 且這收斂是對範數收斂, 不是點收斂。 從 (3) 我們知

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0, \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

對 (4) 這性質有很好的應用, 使細層與粗層有某種關係, 可經由某種簡單的運算從細層得到粗層的投影。

如果 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 且滿足 (1) 至 (4) 的條件, 我們稱 ϕ 生成一個多重解分析 (MRA)。

§ 1–4 Daubechies 的凌波函數

以下談到本章的主題, Daubechies 的凌波函數。 令 $c_k = 0, k \notin \{0, \ldots, 2p-1\}$, 且滿足以下條件

$$\begin{aligned}
&(1)\ \textstyle\sum_k c_k = 2,\\
&(2)\ \textstyle\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \text{ for } 0 \le m \le p-1, \quad (0^0 := 1)\\
&(3)\ \textstyle\sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0m}.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

其中 p 是一個正整數, 也稱作 Daubechies 的凌波函數的階數。 (此處我們不証明以上的 c_k 有解, 但是確實已知對每個 $p \ge 1$ 有 $2p$ 個非零解。) 例如 $p = 1$ 有 $c_0 = 1, c_1 = 1$

和 $p=2$ 有

$$c_0=\frac{3+\sqrt{3}}{4}, c_1=\frac{1+\sqrt{3}}{4}, c_2=\frac{1-\sqrt{3}}{4}, c_3=\frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

若給定正整數 p, 定義

$$m_0(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2p-1} c_k e^{-ik\omega}.$$

則 m_0 是週期 2π 的三角多項式。 我們可以直接算出

$$|m_0(\omega)|^2+|m_0(\omega+\pi)|^2=1. \tag{1.4.2}$$

因爲 $|m_0(\omega)|^2+|m_0(\omega+\pi)|^2$ 有以下的結果:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l c_l e^{-il\omega}}+\frac{1}{2}\sum_k(-1)^k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l(-1)^l c_l e^{-il\omega}}\\
&=\frac{1}{4}\sum_{k,l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega}+\frac{1}{4}\sum_{k,l}(-1)^{k+l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega}\\
&=\frac{1}{4}\sum_l\sum_m c_l c_{l+m} e^{im\omega}+\frac{1}{4}\sum_l\sum_m(-1)^m c_l c_{l+m} e^{im\omega}\\
&=\frac{1}{2}\sum_l\sum_m c_l c_{l+2m} e^{im\omega}\\
&=\frac{1}{2}\sum_m\sum_l c_l c_{l+2m} e^{im\omega}\\
&=1
\end{aligned}$$

此因 $\{c_k\}$ 滿足條件 (3), 而且 $\{c_k\}$ 是有限長的數列。

因 (1) 則 $m_0(0)=1$, 並且令

$$\hat{\phi}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j}) \tag{1.4.3}$$

Mallat(1989) 証明上式的右邊存在。 我們略述如下：考慮

$$f_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j})]\chi_{[-2^n\pi,2^n\pi]}(\omega),$$

則 $\lim_{n\to\infty} f_n = \hat{\phi}$ 點收斂。 更進一步, 可推得

$$\begin{aligned}
\int |f_n(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2^{n+1}\pi} \prod_{j=1}^{n} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2^n\pi} [\prod_{j=1}^{n-1} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2][|m_0(\frac{\omega}{2^n})|^2 + |m_0(\frac{\omega}{2^n}+\pi)|^2] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^{n-1}\pi}^{2^{n-1}\pi} \prod_{j=1}^{n-1} |m_0(\frac{1}{2^j}\omega)|^2 d\omega \\
&= ||f_{n-1}||^2.
\end{aligned}$$

因爲 $||f_0||^2 = 1$, 再由 Fatou's 引理, 則

$$\int |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \le \liminf_{k\to\infty} \int |f_k(\omega)|^2 d\omega \le 1.$$

因此 (1.4.3) 有定義, 我們可得

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \tag{1.4.4}$$

則它的逆富氏變換式爲

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k).$$

我們稱 ϕ 是自格函數 (scaling function), $m_0(\omega)$ 是 ϕ 的特徵函數 (characteristic function), c_k 是 ϕ 的自格係數 (scaling coefficients), 上面等式被稱爲自格等式 (scaling equation)。

$m_0(\omega)$ 是一個三角多項式, 且滿足等式 (1.4.2)。 有幾個關於 $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ (以後我們簡寫成 ϕ_{0k}) 是正規集的等價條件, 將在嚴健彰先生的碩士論文第三章中討論。在此我們僅僅說明 ϕ_{0k} 是正規集。 我們只須修改 Mallat 的証明, 把 $|f_n(\omega)|^2$ 的積分改成 $|f_n(\omega)|^2 e^{ik\omega}$ 的積分, 即可得到所要結果。

以下是從自格函數推導凌波函數的作法。 其主要概念是, 從多重解分析中取層與層之間的正交差集。 若 ϕ 生成一多重解分析。 則我們希望 $V_1 = V_0 \oplus W_0$ 且 W_0 是由另一函數 $\psi(x)$ 的平移所生成。 若 $f \in W_0$ 則 $f(x) = \sum_k v_k \Psi(x-k)$, 則 $\hat{f}(\omega) = \hat{v}(\omega)\hat{\Psi}(\omega)$。

因爲 $f \in W_0$, 則 $f \in V_1$, 而且 $f \perp V_0$。 再因 $f \in V_1$, 則

$$f(x) = \sum_k f_k \phi(2x-k),$$

其中 $f_k =< f(x), \phi(2x-k) >$。 考慮 f 的富氏轉換

$$\hat{f}(\omega) = \sum_k f_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = m_f(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), \tag{1.4.5}$$

其中令 $m_f(\omega) = \sum_k f_k e^{-ik\omega}$, 而 m_f 是屬於 $L^2([0,2\pi])$ 且週期 2π 的函數。 我們要求 $f \perp V_0$, 亦即 $f \perp \phi(x-k)$, 對所有的 k, 所以

$$\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{ik\omega} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

或

$$\int_0^{2\pi} \sum_l \hat{f}(\omega+2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi l)}e^{ik\omega}d\omega = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

所以

$$\sum_l \hat{f}(\omega+2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi l)} = 0.$$

從 (1.4.4), (1.4.2) 及 (1.4.5) 知,

$$m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} = 0.$$

由 (1.4.2) 知 $m_0(\omega)$ 和 $m_0(\omega+\pi)$ 不會同時爲 0, 即存在一個週期 2π 的函數 $\lambda(\omega)$ 使得

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}$$

且 $\lambda(\omega)+\lambda(\omega+\pi)=0$。 讓我們將 λ 寫成 $\lambda(\omega)=e^{i\omega}v(2\omega)$, 對某個 $v(\omega)$, 則

$$\hat{f}(\omega)=e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}v(\omega)\hat{\phi}(\omega/2).$$

現在可以令

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega)&=e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\hat{\phi}(\omega/2)\\&:=\frac{1}{2}\sum_k g_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}\hat{\phi}(\omega/2)\end{aligned}$$

我們可得

$$\psi(x)=\sum_k g_k\phi(2x-k),$$

其中 $g_k:=(-1)^k c_{1-k}$。 而 ψ 即是凌波函數, 這裡也定義

$$m_1(\omega)=e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}. \tag{1.4.6}$$

爲 ψ 的特徵函數。

§ 1–5 凌波函數的分解及重建

以下我們用 Daubechies 的凌波函數爲例, 來介紹凌波分解及凌波重建, 並結束這一章簡介。 所謂凌波分解即是考慮 $V_j=V_{j-1}\oplus W_{j-1}$, 對任意 $j\in\mathbb{Z}$. 若 $f_N\in V_N$, 則

$$f_N=f_{N-1}+g_{N-1},$$

在此 $f_{N-1}\in V_{N-1}$, $g_{N-1}\in W_{N-1}$, 如此下去可推得

$$f_N=g_{N-1}+g_{N-2}+\cdots+g_{N-M}+f_{N-M},$$

這分解是唯一的, 稱之爲凌波分解。 以下我們用 Daubechies 的凌波函數, 來舉例說明。 因爲

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sum_k c_k\phi(2x-k)\\\psi(x)&=\sum_k g_k\phi(2x-k)\end{aligned}$$

且 $V_1 = V_0 + W_0, \phi(2x) \in V_1, \phi(2x-1) \in V_1$, 則存在 $\{a_k\}, \{b_k\}$, 這兩個序列使得

$$\phi(2x) = \sum_k a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k)$$
$$\phi(2x-1) = \sum_k a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k)$$

以上兩個式子, 可結合成

$$\phi(2x-l) = \sum_k [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)] \quad l \in \mathbb{Z},$$

其中對於 Daubechies 的正規凌波函數可有 $a_{-2k} = c_{2k}$, $b_{-2k} = g_{2k}$ 以及 $a_{1-2k} = c_{1-2k}$, $b_{1-2k} = g_{1-2k}$, 此即稱爲 ϕ 及 ψ 的凌波分解及合成關係式。

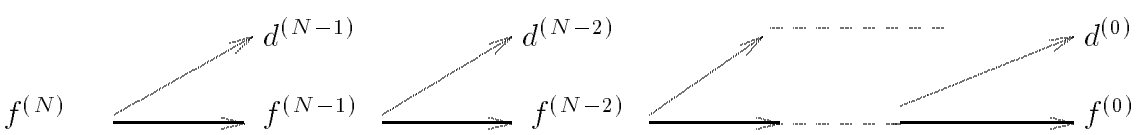
若 f 在 V_N 的投影 $f_N \in V_N$, 則有一序數 $< f_k^{(N)} >$, 使得

$$f_N = \sum_k f_k^{(N)} \phi(2^N x - k).$$

由凌波分解及合成的關係式, 可得

$$\begin{aligned} f_N &= \sum_k f_k^{(N)} \phi(2^N x - k) \\ &= \sum_k f_k^{(N)} [\sum_l a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x - l) + b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x - l)] \\ &= \sum_l \sum_k f_k^{(N)} a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x - l) + \sum_l \sum_k f_k^{(N)} b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x - 1) \end{aligned}$$

可令 $f_k^{(N-1)} = \sum_l f_l^{(N)} a_{l-2k}$ 及 $d_k^{(N-1)} = \sum_l f_l^{(N)} b_{l-2k}$。 因此我們有以下的分解演算法



再因

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k),$$

及

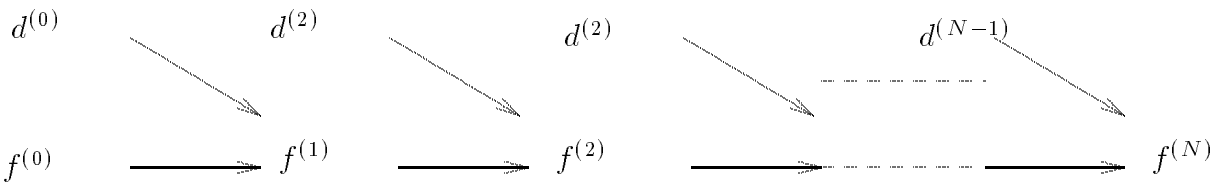
$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x - k).$$

若 $f_{N-K} = \sum_l f_l^{N-K} \phi(2^{N-K}x - l), d_{N-K} = \sum_l d_l^{N-K} \psi(2^{N-K}x - l)$, 則

f_{N-K+1}

$$\begin{aligned}
&= \sum_l f_l^{N-K} \phi(2^{N-K}x - l) + \sum_l d_l^{N-K} \psi(2^{N-K}x - l), \\
&= \sum_l f_l^{N-K} \sum_k c_k \phi(2^{N-k+1}x - 2l - k) + \sum_l d_l^{N-K} \sum_k g_k \psi(2^{N-K+1}x - 2l - k),
\end{aligned}$$

因此 $f_k^{(N-K+1)} = \sum_l f_l^{N-K} c_{k-2l} + d_l^{N-K} g_{k-2l}$, 現在我們有重建的演算法:



第二章 區段上的凌波函數

在此我們所建造在區段上的自格和凌波函數, 是以 Daubechies 的緊緻函蓋、正則的自格和凌波函數作爲根據, 再大部份按照 Andersson, Hall, Jawerth 及 Peters 的指引, 建造靠近邊界的自格和凌波函數。 詳細過程如下。

§ 2–1 區段上的自格函數

先考慮特殊情形。 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是 Daubechies 的自格和凌波函數, 階數 $p = 2$, 基準尺度 $j = 0$ 時,

$$\mathrm{supp}\phi(x) = [0, 3], \quad \mathrm{supp}\psi(x) = [0, 3].$$

此處我們平移文獻上慣用的 $\psi(x)$, 使其函蓋與 $\phi(x)$ 相同。

但在此我們令尺度 $j = 3$ 爲最低基準。 也就是, 當我們說 $\phi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k)$, 總是假設 $j \geq 3$ 的。 如此, 這樣的 ϕ_{jk} 才不會同時碰到 [0,1] 的兩個端點。

若直接使用 $\phi_{jk}|_{[0,1]}$ 作爲 $V_j|_{[0,1]}$ 的基底, 則 $\dim V_j|_{[0,1]} = 2^j + 2(p-1)$。 現在我們要定義新的 $V_j[0,1]$ 使其"內涵"不變, 但

$$\dim V_j[0,1] = 2^j.$$

我們要 $V_j[0,1]$ 的"內涵"不變, 最主要的就是使 $V_j[0,1]$ 與 $V_j|_{[0,1]}$ 所含的多項式要一樣多。 靠邊界點 (0 或 1) 的 ϕ_{jk} 可以改成用多項式表達, 再將它們正則化。

首先, 設定 $\delta_L = \delta_R = 1$, 當 $j \geq 3$

$$(\delta_L =)1 \leq k \leq 2^j - 4 (= 2^j - 2p + 1 - \delta_R),$$

ϕ_{jk} 的函蓋是整個落在 $(0,1)$ 之內。 我們保留這些函數爲基底。 所以已經有了 $2^j - 4$ 個維度, 還差四個。 我們將會在左右兩端各找兩個。

靠左端點 $(x=0)$, 考慮多項式

$$\mathcal{X}_j^m(x) = \sqrt{2^j}(2^j x)^m, \quad 0 \le m \le 1(=p-1);$$

靠右端點 $(x=1)$, 則考慮多項式

$$\mathcal{Y}_j^m(x) = \mathcal{X}_j^m(x-1) = \sqrt{2^j}(2^j(x-1))^m, \quad 0 \le m \le 1(=p-1).$$

對任一層 $j \ge 3$, 要把 $\mathcal{X}_j^m(x)$ 投影到

$$\mathrm{span}\{\phi_{jk}(x) \mid \mathrm{supp}\phi_{jk}(x) \text{ 跨過左端點0 }\}$$

$$= \mathrm{span}\{\phi_{jk}(x) \mid k = -2(=2-2p), -1, 0(=\delta_L - 1)\}$$

把 $\mathcal{Y}_j^m(x)$ 投影到

$$\mathrm{span}\{\phi_{jk}(x) \mid \mathrm{supp}\phi_{jk}(x) \text{ 跨過右端點1 }\}$$

$$= \mathrm{span}\{\phi_{jk}(x) \mid k = 2^j - 3(=2^j - 2p + 2 - \delta_R), 2^j - 2, 2^j - 1\}$$

定義:

$$M_m = \int x^m \phi(x)\, dx.$$

其中, 在此份論文報告中, 若無特別註明, 我們以 $\int$ 來代表整個實數軸的積分, $i.e.$ $\int = \int_{-\infty}^{\infty}$, 由

$$\langle \mathcal{X}_j^m, \phi_{jk} \rangle = \int (x+k)^m \phi(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} k^i M_{m-i}$$

得知 $\mathcal{X}_j^m$ 的投影係數與 j 無關; 定其係數爲

$$x_k^m, \quad m = 0, 1, \quad k = -2, -1, 0.$$

而且 $\mathcal{Y}_j^m(x)$ 的投影係數也與 j 無關, 雖然

$$y_k^m = \langle \mathcal{Y}_j^m, \phi_{jk} \rangle = \int (x + k - 2^j)^m \phi(x)\, dx.$$

但是 k 的值是 $2^j - 2p + l, l = 1, 2, \ldots, 2p-1$, 使 y_k^m 與 j 無關。 x_k^m 和 y_k^m 的數值可以由 M_m 精確的算出來。(phi_coef.m)

令投影函數爲

$$X_j^m = \sum_{k=-2}^{0} x_k^m \phi_{jk}|_{[0,1]},$$

$$Y_j^m = \sum_{k=2^j-3}^{2^j-1} y_k^m \phi_{jk}|_{[0,1]}.$$

可證明 $\{X_j^m\}_{m=0}^1$, $\{Y_j^m\}_{m=0}^1$ 兩集合的函數均線性無關。(phi_proj.m) 很明顯地, 此二集合和 $\{\phi_{jk}\}_{k=1}^{2^j-4}$ 相互正交。 而且後者已經是一個正則集合, 只須再把前二個集合中的線性無關函數作正則化處理, 就有一整個正則集合, 個數爲 2^j。 定義 $V_j[0,1]$ 就是這個正則集合所展成的線性空間。

在此, 我們使用一個標準的正則化步驟。 亦即, 先算出 $\{X_j^m\}_{m=0}^1$ 的質量矩陣 $\mathbf{X} = (X_{mn})$, 其中

$$X_{mn} = \langle X_j^m, X_j^n \rangle.$$

注意: $\mathbf{X}$ 其實與 j 無關。 計算這些數時, 我們須要這些"半積分":

$$N_1 = \int_0^\infty \phi(x+2)\phi(x+2)\,dx,$$

$$N_2 = \int_0^\infty \phi(x+2)\phi(x+1)\,dx,$$

$$N_3 = \int_0^\infty \phi(x+1)\phi(x+1)\,dx.$$

而這些數也有很精準的數值可供使用。(由徐敏堂先生的碩士論文中的方法提供這些數的精確值) 現在, 可以推導 X_{mn} 爲:

$$X_{00} = 1 + N_1 + 2N_2 + N_3,$$

$$X_{01} = x_{-2}^1(N_1 + N_2) + x_{-1}^1(N_2 + N_3) + x_0^1,$$

$$X_{11} = (x_{-2}^1)^2 N_1 + (x_{-1}^1)^2 N_3 + (x_0^1)^2 + 2x_{-2}^1 x_{-1}^1 N_2$$

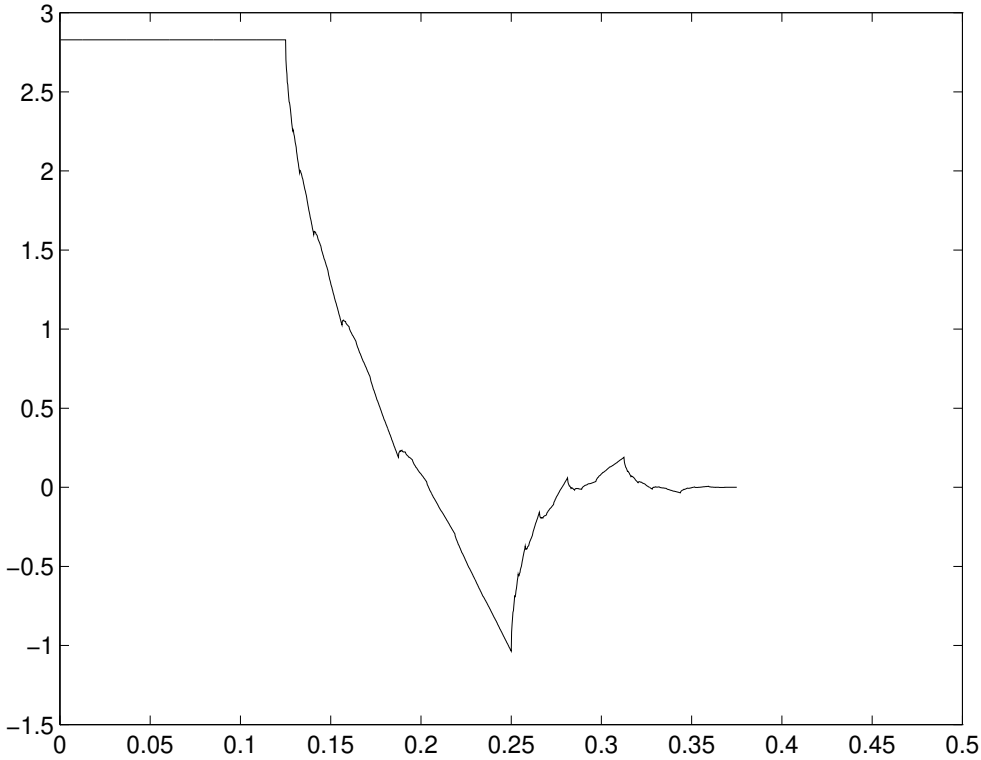


Figure 1. $X_3^0(x)$.

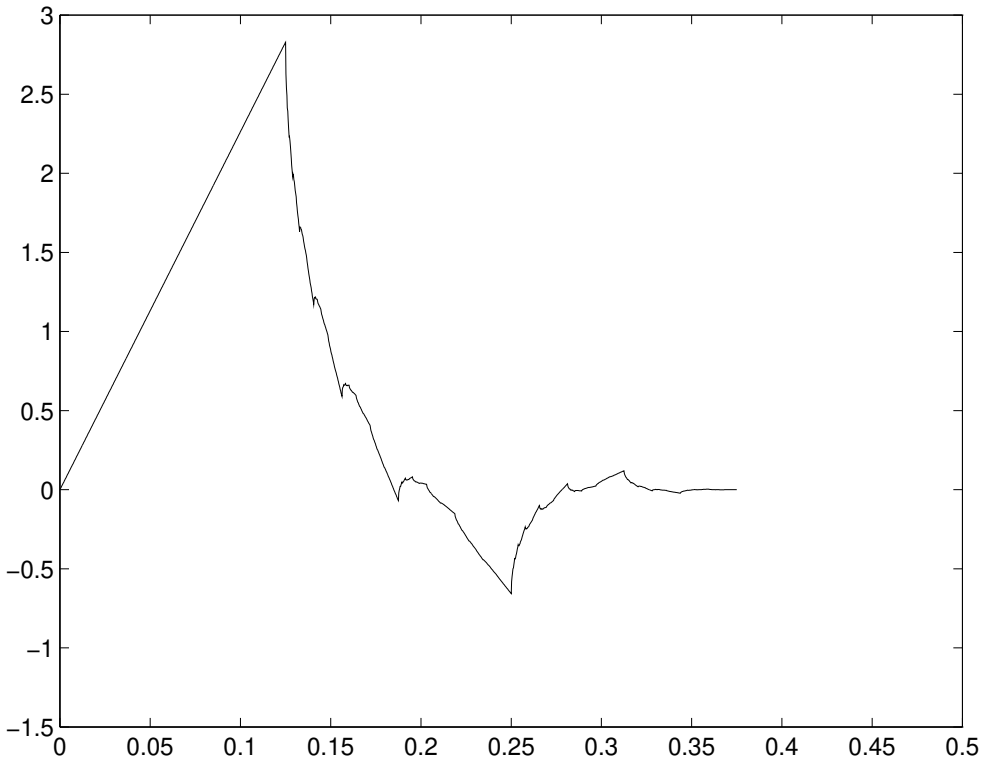


Figure 2. $X_3^1(x)$.

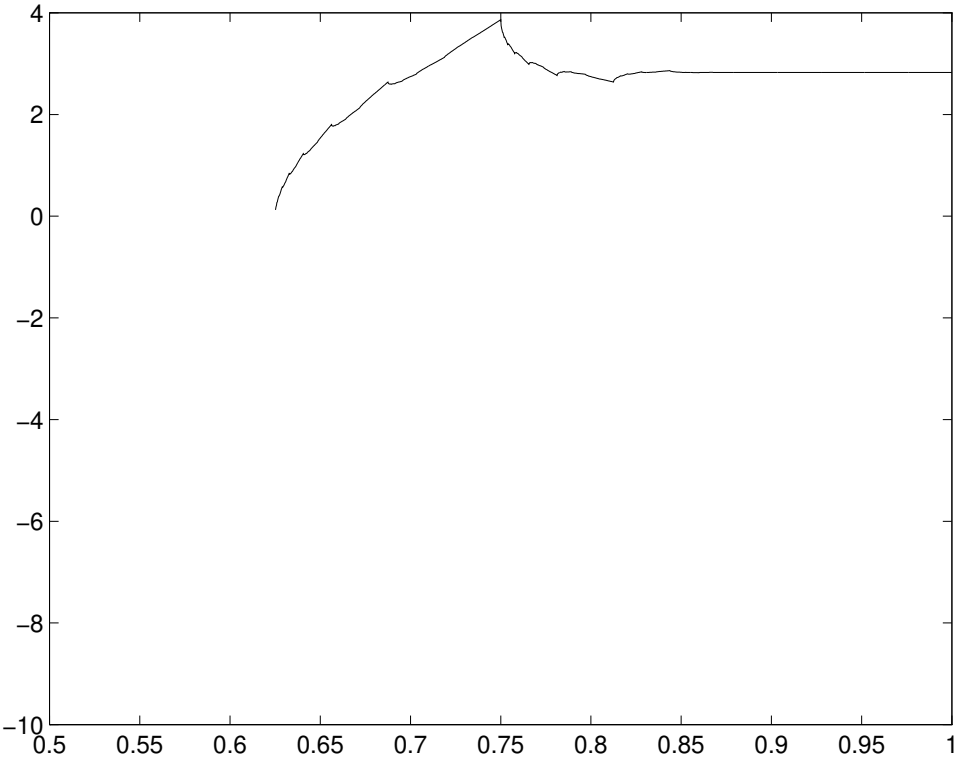


Figure 3. $Y_3^0(x)$.

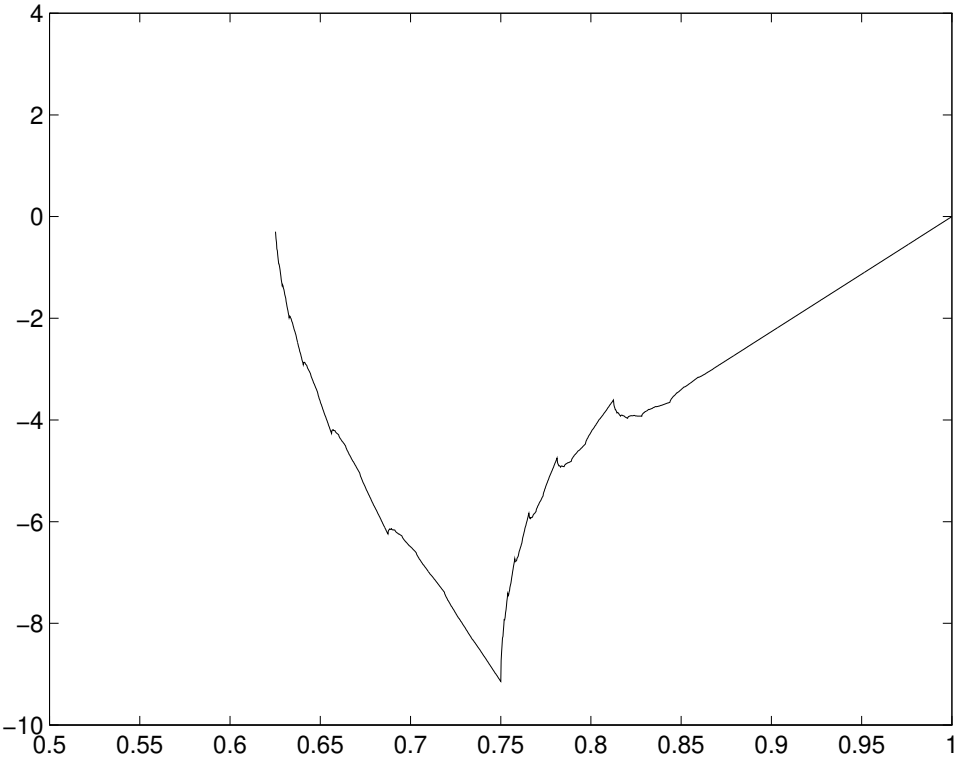


Figure 4. $Y_3^1(x)$.

Y 也可類似算得:

$$Y_{00} = 3 - N_1 - 2N_2 - N_3,$$

$$Y_{01} = y^1_{jr_1} + y^1_{jr_2}(1 - N_1 - N_2) + y^1_{jr_3}(1 - N_2 - N_3),$$

$$Y_{11} = (y^1_{jr_1})^2 + (y^1_{jr_2})^2(1 - N_1) + (y^1_{jr_3})^2(1 - N_3) - 2y^1_{jr_2}y^1_{jr_3}N_2$$

其中 $r_1 = 2^j - 3$, $r_2 = 2^j - 2$, $r_3 = 2^j - 1$ ∘ (phi_mass.m)

明顯地, **X** 和 **Y** 都是對稱正定矩陣。 所以存在 $\mathbf{S} = \mathbf{X}^{-1/2}$ 和 $\mathbf{T} = \mathbf{Y}^{-1/2}$ 。 定義:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{j,-1}(x) \\ \varphi_{j,0}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} X^0_j(x) \\ X^1_j(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_{jr_1}(x) \\ \varphi_{jr_2}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} Y^0_j(x) \\ Y^1_j(x) \end{pmatrix}.$$

則

$$\{\varphi_{j,-1}, \varphi_{j0}, \phi_{j1}, \ldots, \phi_{jr_0}, \varphi_{jr_1}, \varphi_{jr_2}\}$$

形成 $V_j[0,1]$ 的一組正則基底。(or_phi.m) 在此 $r_0 = 2^j - 4$. 爲符號上的方便, r_0 永遠代表第 j 層屬於內部基底的最後一個足標。 $r_n = r_o + n$. 而 j 可以由前後文中闡明。

注意: 靠邊界的自格函數在靠邊界點的 $\frac{1}{2^j}$ 長度實際上是多項式。 此時, 雖然 $V_j[0,1] \neq V_j|_{[0,1]}$, 但 $\cup V_j[0,1]$ 對 $L^2([0,1])$ 是稠密的(dense), 而且 $V_j[0,1]$ 仍保有原始凌波函數中層層包含之關係, 亦即:

$$V_j[0,1] \subset V_{j+1}[0,1] \subset V_{j+2}[0,1] \subset \ldots,$$

因此, $V_j[0,1]$ 的基底可由 $V_{j+1}[0,1]$ 的基底重建回來。 其關係如下:

先考慮 $j = 3$ 之情況, 假設

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_{3,-1} \\ \varphi_{3,0} \\ \vdots \\ \varphi_{3,5} \\ \varphi_{3,6} \end{pmatrix}, \quad \Phi_4 = \begin{pmatrix} \varphi_{4,-1} \\ \varphi_{4,0} \\ \vdots \\ \varphi_{4,13} \\ \varphi_{4,14} \end{pmatrix}$$

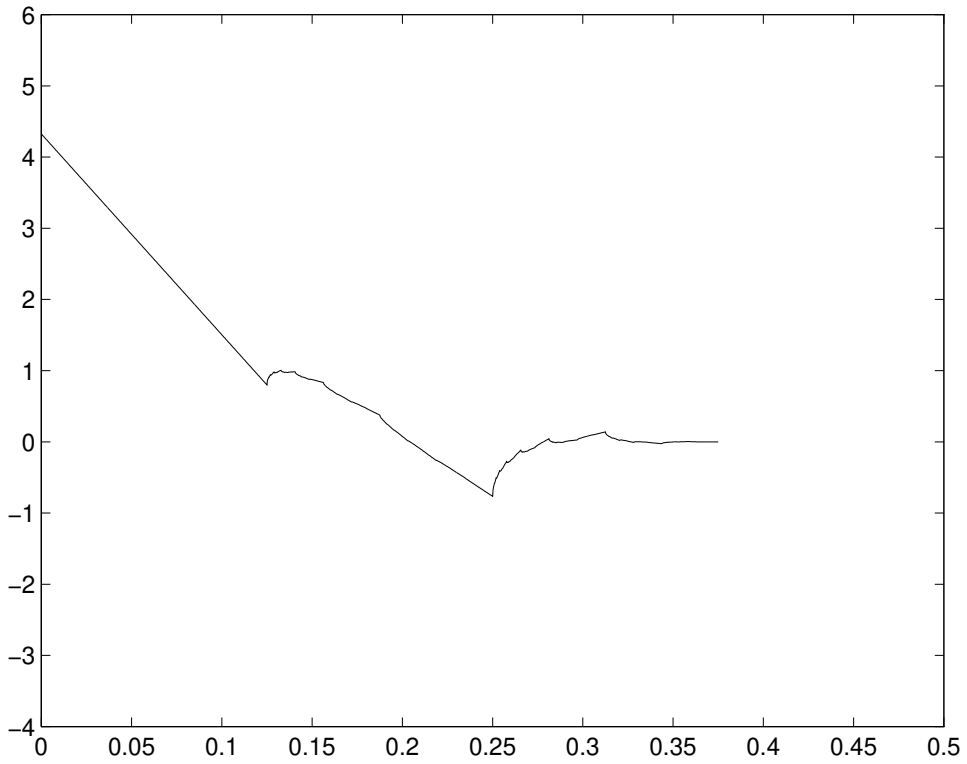


Figure 5. $\varphi_{3,-1}(x)$.

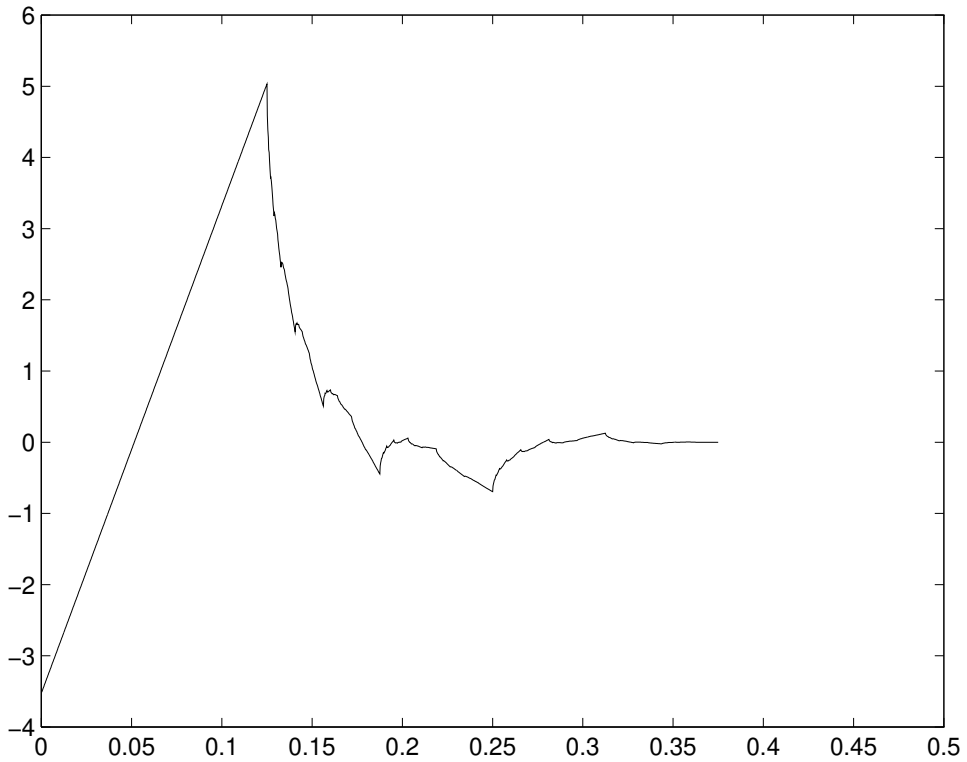


Figure 6. $\varphi_{3,0}(x)$.

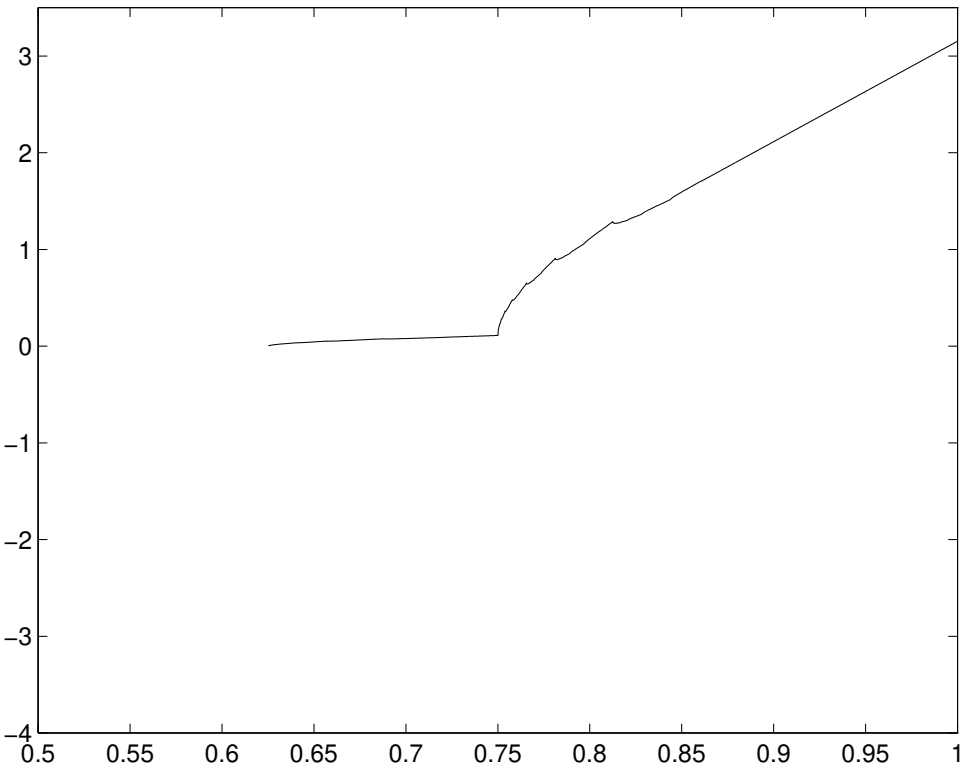


Figure 7. $\varphi_{3,5}(x)$.

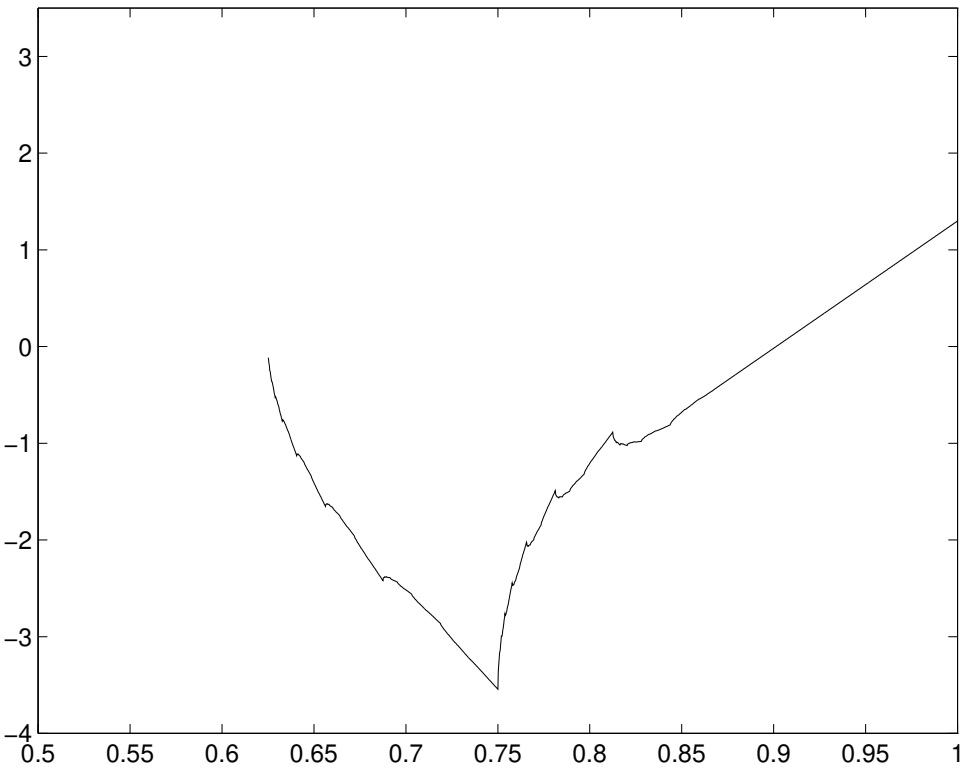


Figure 8. $\varphi_{3,6}(x)$.

令 $\Phi_3 = H\Phi_4$, 則 H 是8×16 的矩陣。 因爲

$$\{\varphi_{4,-1}, \varphi_{4,0}, \phi_{4,1}, \ldots, \phi_{4,12}, \varphi_{4,13}, \varphi_{4,14}\}$$

是 $V_4[0,1]$ 的一組正則基底, 所以,

$$H_{mn} = \langle \varphi_{3,m}, \varphi_{4,n} \rangle, \quad m = -1, 0, \ldots, 6, \quad n = -1, 0, \ldots, 14.$$

若將 H 按

$$H_{mn} = \langle \varphi_{3,m}, \varphi_{4,n} \rangle$$

中的 $\varphi_{3,m}, \varphi_{4,n}$ 分屬左、中、右,而劃分爲九個區域, 則

$$H = \begin{pmatrix} H_{LL} & H_{LI} & H_{LR} \\ H_{IL} & H_{II} & H_{IR} \\ H_{RL} & H_{RI} & H_{RR} \end{pmatrix}$$

其中, $H_{LL} = \langle \varphi_{3,m}, \varphi_{4,n} \rangle, \quad m = -1, 0, \quad n = -1, 0$ 是 2×2 的矩陣,

$$\begin{aligned} H_{LL} &= \begin{pmatrix} \langle \varphi_{3,-1}, \varphi_{4,-1} \rangle & \langle \varphi_{3,-1}, \varphi_{4,0} \rangle \\ \langle \varphi_{3,0}, \ \varphi_{4,-1} \rangle & \langle \varphi_{3,0}, \ \varphi_{4,0} \rangle \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} \langle X_3^0, X_4^0 \rangle & \langle X_3^0, X_4^1 \rangle \\ \langle X_3^1, X_4^0 \rangle & \langle X_3^1, X_4^1 \rangle \end{pmatrix} S^t. \end{aligned}$$

$H_{LI} = \langle \varphi_{3,m}, \phi_{4,n} \rangle, \quad m = -1, 0, \quad n = 1, 2, \ldots, 12$ 。 是 2×12 的矩陣,最前面3行是:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \langle \varphi_{3,-1}, \phi_{4,1} \rangle & \langle \varphi_{3,-1}, \phi_{4,2} \rangle & \langle \varphi_{3,-1}, \phi_{4,3} \rangle \\ \langle \varphi_{3,0}, \ \phi_{4,1} \rangle & \langle \phi_{3,0}, \ \phi_{4,2} \rangle & \langle \varphi_{3,0}, \ \phi_{4,3} \rangle \end{pmatrix} \\ =&\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S \begin{pmatrix} c_1 + c_3 & c_2 & c_3 \\ x_0^1 c_1 + x_{-1}^1 c_3 & x_0^1 c_2 & x_0^1 c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其餘的 2×9 部分因爲垂直的關係是零矩陣。 $H_{II} = \langle \phi_{3,m}, \phi_{4,n} \rangle, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad n = 1, 2, \ldots, 12$ 。 是 4×12 的矩陣,

$$\begin{aligned} H_{II} &= \begin{pmatrix} \langle \phi_{3,1}, \phi_{4,1} \rangle & \langle \phi_{3,1}, \phi_{4,2} \rangle & \cdots & \langle \phi_{3,1}, \phi_{4,12} \rangle \\ \langle \phi_{3,2}, \phi_{4,1} \rangle & \langle \phi_{3,2}, \phi_{4,2} \rangle & \cdots & \langle \phi_{3,2}, \phi_{4,12} \rangle \\ \langle \phi_{3,3}, \phi_{4,1} \rangle & \langle \phi_{3,3}, \phi_{4,2} \rangle & \cdots & \langle \phi_{3,3}, \phi_{4,12} \rangle \\ \langle \phi_{3,4}, \phi_{4,1} \rangle & \langle \phi_{3,4}, \phi_{4,2} \rangle & \cdots & \langle \phi_{3,4}, \phi_{4,12} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$H_{RI} = \langle \varphi_{3,m}, \phi_{4,n} \rangle, \quad m = 5, 6 \quad n = 1, 2, \ldots, 12$。是 2×12 的矩陣, 最後面3行是:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{3,5}, \phi_{4,10} \rangle & \langle \varphi_{3,5}, \phi_{4,11} \rangle & \langle \varphi_{3,5}, \phi_{4,12} \rangle \\ \langle \varphi_{3,6}, \phi_{4,10} \rangle & \langle \varphi_{3,6}, \phi_{4,11} \rangle & \langle \varphi_{3,6}, \phi_{4,12} \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 + c_0 \\ y_5^1 c_0 & y_5^1 c_1 & y_5^1 c_2 + y_6^1 c_0 \end{pmatrix}$$

前面的 2×9 部分因爲垂直的關係是零矩陣。 $H_{RR} = \langle \varphi_{3,m}, \varphi_{4,n} \rangle, \quad m = 5, 6, \quad n = 13, 14$。是 2×2 的矩陣,

$$H_{RR} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_{3,5}, \varphi_{4,13} \rangle & \langle \varphi_{3,5}, \varphi_{4,14} \rangle \\ \langle \varphi_{3,6}, \varphi_{4,13} \rangle & \langle \varphi_{3,6}, \varphi_{4,14} \rangle \end{pmatrix}$$
$$= T \begin{pmatrix} \langle Y_3^0, Y_4^0 \rangle & \langle Y_3^0, Y_4^1 \rangle \\ \langle Y_3^1, Y_4^0 \rangle & \langle Y_3^1, Y_4^1 \rangle \end{pmatrix} T^t$$

其餘的 $H_{LR}, H_{IL}, H_{IR}, H_{RL}$ 均因爲垂直的關係,都是零矩陣。(jlow_pass.m)

雖然矩陣 H 的大小隨 j 而變 (H 是 $2^j \times 2^{j+1}$ 的矩陣), 但是其值不隨 j 而變。

§ 2–2 區段上的凌波函數

以下考慮 $W_j[0,1]$ 及其相關的凌波函數 $\psi(x)$。

首先,我們定義 $W_j[0,1]$ 是 $V_{j+1}[0,1]$ 中與 $V_j[0,1]$ 垂直的空間。因爲

$$\dim V_j[0,1] = 2^j.$$

而且

$$V_{j+1}[0,1] = V_j[0,1] \oplus W_j[0,1]$$

所以

$$\dim W_j[0,1] = 2^j.$$

亦即, $W_j[0,1]$ 應當有 2^j 個基底。

第一步, 我們先確定有那些原始的凌波涵數, $\psi_{jk}(x)$, 仍然在我們定義的 $V_{j+1}[0,1]$ 裡。

因爲, 在原始的 ϕ, ψ 有下列之關係:

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l h_{l-2k} \phi_{j+1,l}$$

而且 $(2-2p=)-2 \le l-2k \le 1$ 時, $h_{l-2k} \neq 0$. 所以,

$$\begin{cases} 1 \le l \le 2^{j+1}-4 \\ -2 > -2k \\ 1 < 2^{j+1}-4-2k \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2 \le k \le 2^j - 3 (= 2^j - p - 1)$$

$$\Rightarrow \psi_{jk}(x) \in V_{j+1}[0,1], \quad \text{for} \quad 2 \le k \le 2^j - 3$$

而且這些 ψ_{jk} 是垂直 $V_j[0,1]$ 的。 又因爲我們平移了文獻上慣用的 $\psi(x)$, 所以 k 的足標應當是 $1 \le k \le 2^j - 4$, *i.e.*

$$\{\psi_{jk}\}_{k=1}^{2^j-4} \in W_j[0,1]$$

現在我們有了 $W_j[0,1]$ 的 2^j-4 個正則基底, 同樣地, 須要在左右兩邊各找兩個基底。 到目前爲止, 我們已有了 $V_j[0,1]$、$V_{j+1}[0,1]$ 的正則基底, 也知道 $W_j[0,1]$ 的 2^j-4 個基底, 因爲

$$V_{j+1}[0,1] = V_j[0,1] \oplus W_j[0,1]$$

所以 $V_j[0,1]$ 的基底聯集 $W_j[0,1]$ 的基底會構成 $V_{j+1}[0,1]$ 的一組基底。 因此我們檢查 $V_{j+1}[0,1]$ 的基底中有那些不能由 $V_j[0,1]$ 及 $\{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{2^j-4}$ 線性組合成, 再把它們投影至 $W_j[0,1]$ 成爲 $W_j[0,1]$ 的基底。

因爲,

$$\varphi_{j+1,-1}(x) \notin \text{span}\{V_j[0,1] \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{k=1}^{2^j-4}\}$$

$$\varphi_{j+1,0}(x) \notin \text{span}\{V_j[0,1] \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{k=1}^{2^j-4} \cup \varphi_{j+1,-1}(x)\}$$

$< pf >$ 假設 $\varphi_{j+1,-1} \in \text{span}\{V_j[0,1] \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{k=1}^{2^j-4}\}$ i.e.

$$\exists a_{-1}, a_0, a_1, b_1 \in R, \quad a_{-1}^2 + a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 \neq 0, \quad s.t.$$

$$\varphi_{j+1,-1} = a_{-1}\varphi_{j,-1} + a_0\varphi_{j0} + a_1\phi_{j1} + b_1\psi_{j1}$$

因爲

$$\text{supp}\varphi_{j+1,-1} = [0, \frac{3}{2^{j+1}}]$$

只有兩個函數 ϕ_{j1}, ψ_{j1} 在 $[\frac{3}{2^j}, \frac{4}{2^j}]$

$$\Rightarrow a_1\phi_{j1} + b_1\psi_{j1}|_{[\frac{3}{2^j}, \frac{4}{2^j}]} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1 = 0$$

否則, 不失其一般性, 假設 $a_1 \neq 0$

$$\phi_{j1} = \frac{b_1}{a_1}\psi_{j1}|_{[\frac{3}{2^j}, \frac{4}{2^j}]} \quad (\text{矛盾})$$

同樣地, 考慮 $[\frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}]$ 得到

$$a_{-1} = a_0 = 0.$$

i.e.

$$\varphi_{j+1,-1}(x) \notin \text{span}\{V_j[0,1] \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{k=1}^{2^j-4}\}$$

同理可證,

$$\varphi_{j+1,0}(x) \notin \text{span}\{V_j[0,1] \cup \{\psi_{j,k}(x)\}_{k=1}^{2^j-4} \cup \varphi_{j+1,-1}(x)\} \qquad \blacksquare$$

所以, 在左邊, 我們考慮 $\varphi_{j+1,-1}, \varphi_{j+1,0}$ 這兩個函數; 在右邊, 則考慮 $\varphi_{j+1,r_1}, \varphi_{j+1,r_2}$ 投影至 $W_j[0,1]$。 定義投影函數:

$$\Psi_{jL}^0 = \varphi_{j+1,-1} - Pj|_{V_j[0,1]}\varphi_{j+1,-1}$$

$$\Psi_{jL}^1 = \varphi_{j+1,0} - Pj|_{V_j[0,1]}\varphi_{j+1,0}$$

$$\Psi_{jR}^0 = \varphi_{j+1,r_1} - Pj|_{V_j[0,1]}\varphi_{j+1,r_1}$$

$$\Psi_{jR}^1 = \varphi_{j+1,r_2} - Pj|_{V_j[0,1]}\varphi_{j+1,r_2}$$

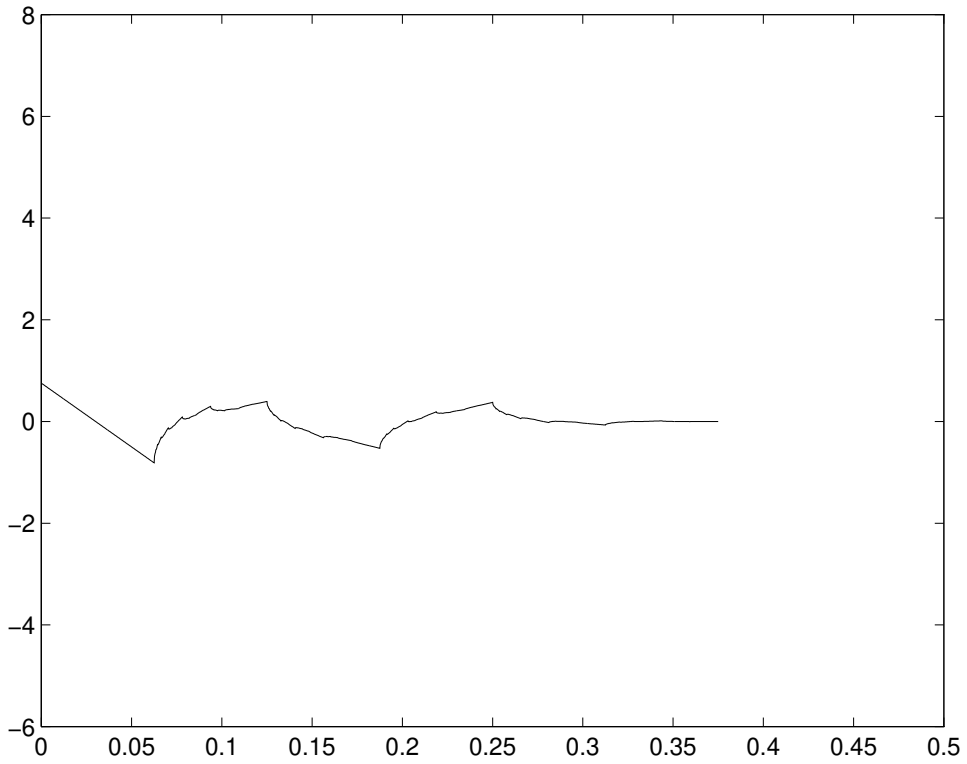


Figure 9. $\Psi^0_{3\,L}(x)$.

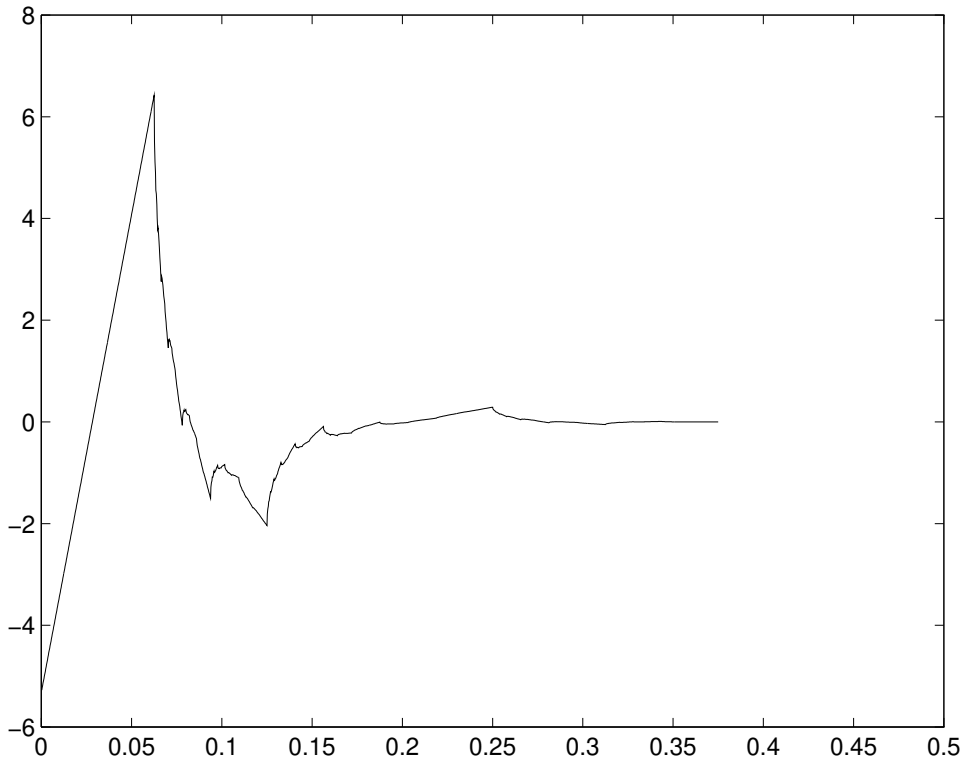


Figure 10. $\Psi^1_{3\,L}(x)$.

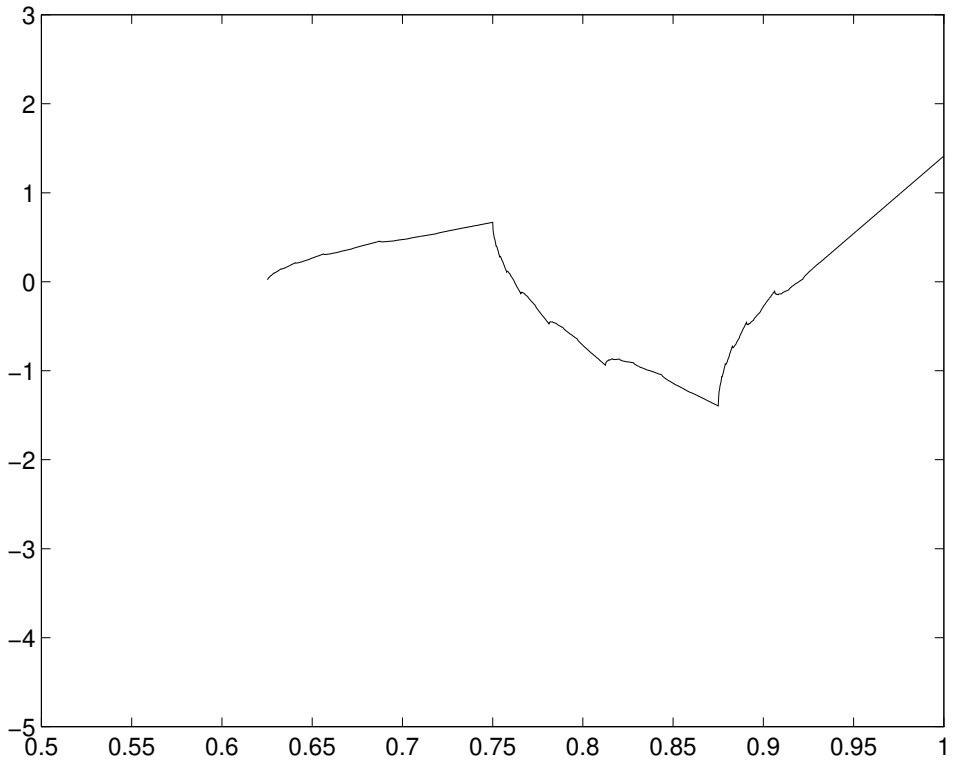


Figure 11. $\Psi^0_{3R}(x)$.

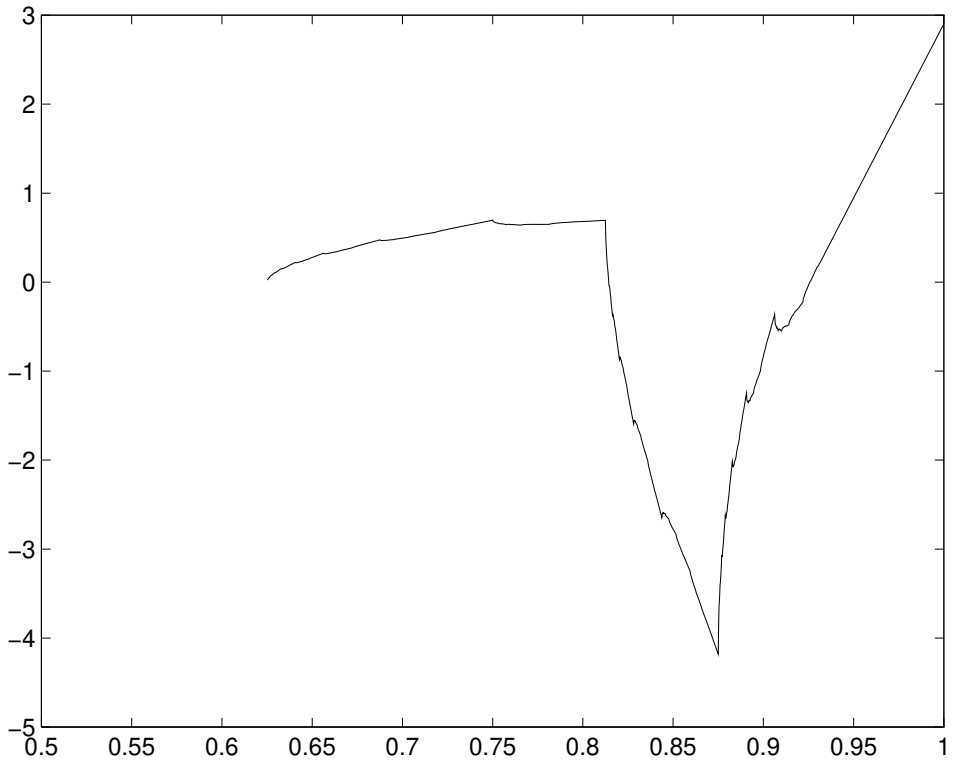


Figure 12. $\Psi^1_{3R}(x)$.

則 Ψ^*_{jL}, Ψ^*_{jR} 彼此線性獨立,(psi_proj.m) 也與 $\{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{2^j-4}$ 線性獨立, 相互正交, 且 $\{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{2^j-4}$ 已是正則集合。 所以我們只需正則化 Ψ^*_{jL}, Ψ^*_{jR}, 那麼就可得到一組爲數 2^j 的 $W_j[0,1]$ 的正則基底。

分別計算 Ψ^*_{jL} 的質量矩陣 $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{X}}_{mn})$, Ψ^*_{jR} 的質量矩陣, $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{\mathbf{Y}}_{mn})$ 我們可利用上述的 H, 推導得

$$\hat{\mathbf{X}}_{mn} = \langle \Psi^m_{jL}, \Psi^n_{jL} \rangle$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{mn} = \langle \Psi^m_{jR}, \Psi^n_{jR} \rangle$$

$$\hat{\mathbf{X}} = I - H^t_{LL} H_{LL}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = I - H^t_{RR} H_{RR}$$

其中, I 是 2×2 的單位矩陣。(psi_mass.m)

$\hat{\mathbf{X}}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}$ 都是對稱正定矩陣, 且與 j 無關。 定義:

$$\begin{pmatrix} \psi_{j,-1}(x) \\ \psi_{j,0}(x) \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{X}}^{-1/2} \begin{pmatrix} \Psi^0_{jL}(x) \\ \Psi^1_{jL}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_{jr_1}(x) \\ \psi_{jr_2}(x) \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{Y}}^{-1/2} \begin{pmatrix} \Psi^0_{jR}(x) \\ \Psi^1_{jR}(x) \end{pmatrix}.$$

則

$$\{\psi_{j,-1}, \psi_{j0}, \psi_{j1}, \ldots, \psi_{jr_0}, \psi_{jr_1}, \psi_{jr_2}\}$$

形成 $W_j[0,1]$ 的一組正則基底。(or_psi.m)

同樣地, $W_j[0,1]$ 是 $V_{j+1}[0,1]$ 的一個子空間。 考慮 $j=3$ 之情況, 假設

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \psi_{3,-1} \\ \psi_{3,0} \\ \vdots \\ \psi_{3,5} \\ \psi_{3,6} \end{pmatrix}, \quad \Phi_4 = \begin{pmatrix} \varphi_{4,-1} \\ \varphi_{4,0} \\ \vdots \\ \varphi_{4,13} \\ \varphi_{4,14} \end{pmatrix}$$

令 $\Psi_3 = G\Psi_4$ 則 G 是 8×16 的矩陣,

$$G_{mn} = \langle \psi_{3,m}, \varphi_{4,n} \rangle, \quad m = -1, 0, \ldots, 6, \quad n = -1, 0, \ldots, 14.$$

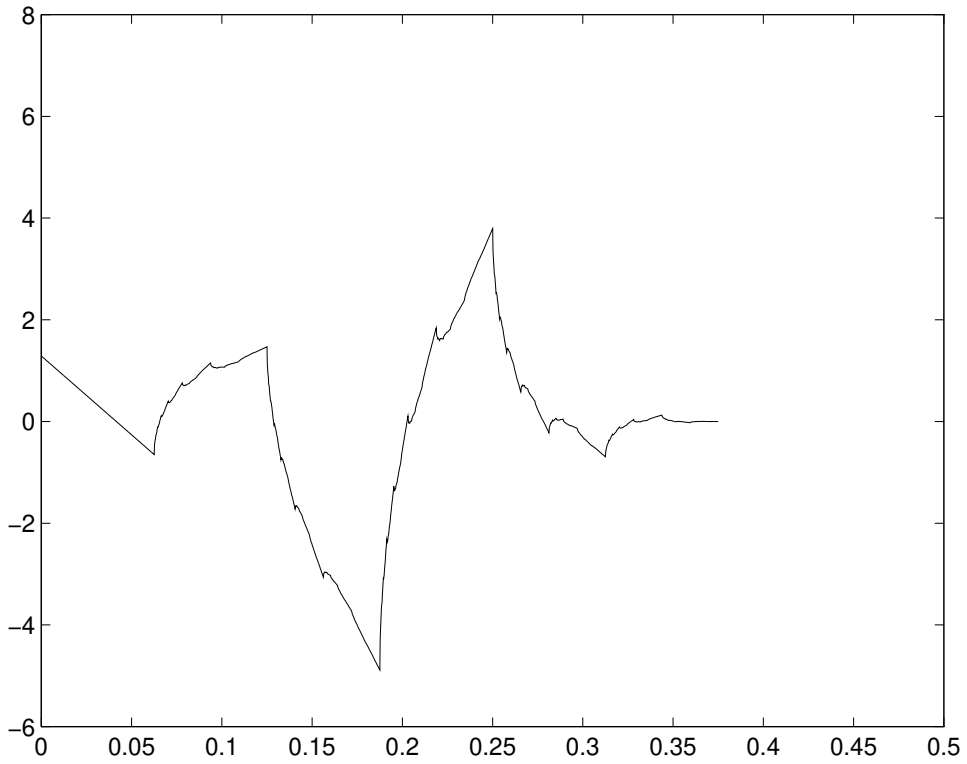


Figure 13. $\psi_{3,-1}(x)$.

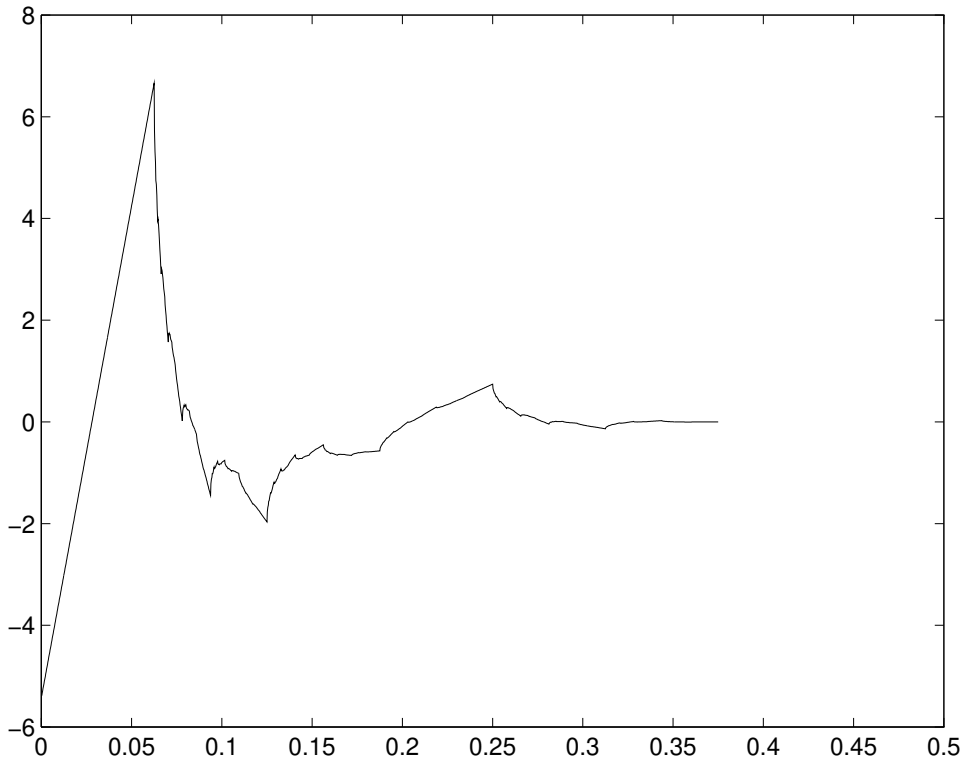


Figure 14. $\psi_{3,0}(x)$.

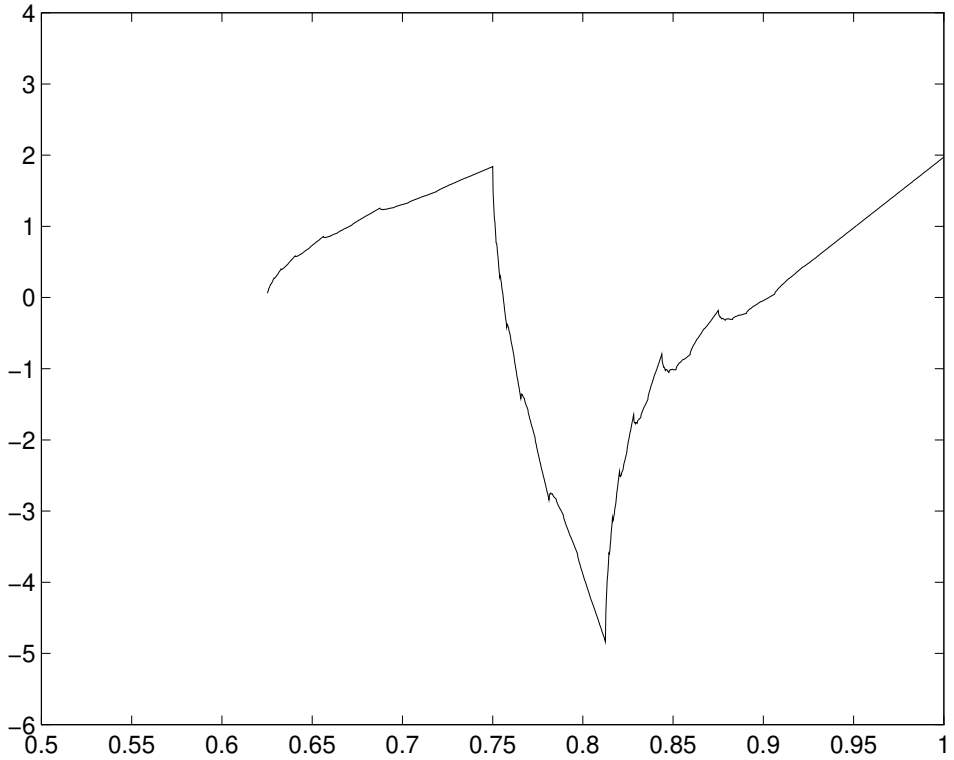


Figure 15. $\psi_{3,5}(x)$.

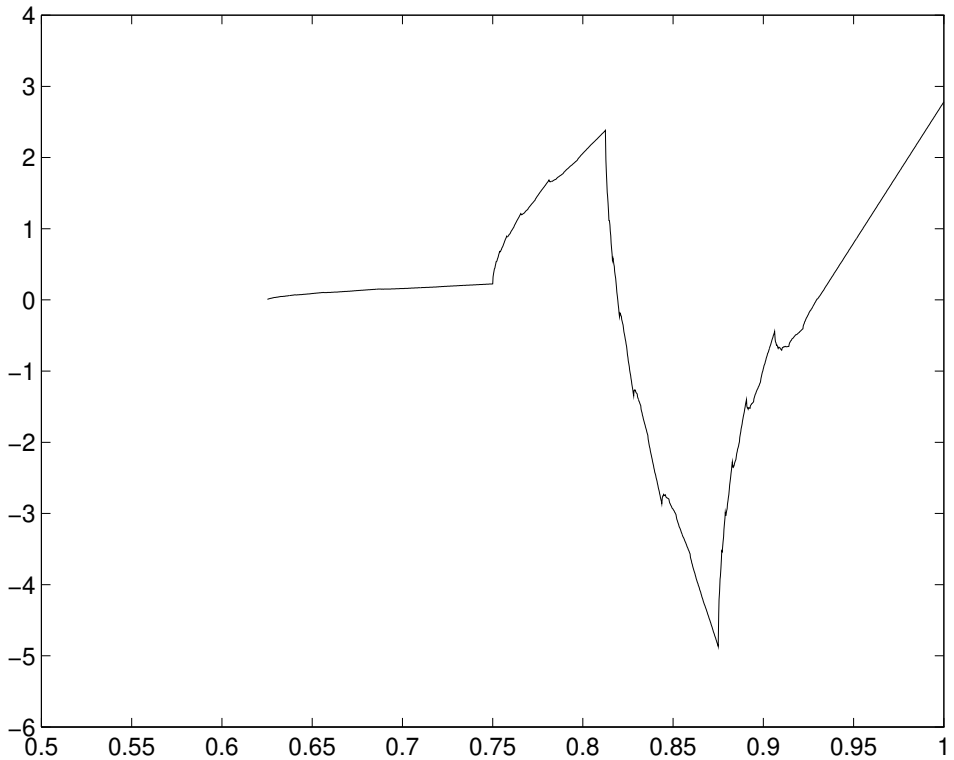


Figure 16. $\psi_{3,6}(x)$.

$$G_{LL} = (I - H_{LL}^t H_{LL})^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{LI} = -(I - H_{LL}^t H_{LL})(H_{LL}^t H_{LI})$$

$$G_{RI} = -(I - H_{RR}^t H_{RR})(H_{RR}^t H_{RI})$$

$$G_{RR} = (I - H_{RR}^t H_{RR})^{\frac{1}{2}}$$

其中, I 是 2×2 的單位矩陣。(jhigh_pass.m)

附註 1: 在一般的情況下,

$$\dim V_j[0,1] = 2^j - \delta_L - \delta_R + 2, \quad \dim W_j[0,1] = 2^j.$$

選擇越大的 δ_L, δ_R 會使得靠邊界的自格函數 φ 函蓋越大。 所以我們選擇 $\delta_L = \delta_R = 1$ 除了可以使 $V_j[0,1]$ 與 $W_j[0,1]$ 有相同的維度外, 還使得靠邊界的自格函數和內部的自格函數有相同長度的函蓋。

附註 2: 另外, H 是低頻濾波器 (low pass filter), G 是高頻濾波器 (high pass filter)。 在一般的情況下, H 和 G 是 $2^j \times 2^{j+1}$ 的矩陣, H_{LL} 、G_{LL} 、H_{RR} 和 G_{RR} 是 $p \times p$ 的矩陣, H_{LI} 、G_{LI} 、H_{RI} 和 G_{RI} 有值的部分是 $p \times (2p-1)$ 的矩陣, 它們的值都與 j 無關。 H_{II} 和 G_{II} 是 $(2^j - 2p) \times (2^{j+1} - 2p)$ 的矩陣, 雖然矩陣的大小由 j 決定, 但是它們的每一列都有相同的形式。 而且仍然滿足

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}H)^t(\frac{1}{\sqrt{2}}H) + (\frac{1}{\sqrt{2}}G)^t(\frac{1}{\sqrt{2}}G) = I \tag{2.2.1}$$

§ 2–3 離散的凌波轉換 (Discrete Wavelets Transformation, DWT)

我們從 Daubechies 的緊緻函蓋而且正則的自格函數出發, 利用多項式投影的觀念, 造出區段上的自格和凌波函數, 同樣是有緊緻函蓋, 正則的; 也建造了相對應的高頻及

低頻濾波器。 現在我們有了區段上凌波函數作離散凌波轉換的工具, 我們將其步驟敘述於下:

在應用上, 一個函數是以其離散的點值, 被紀錄成一個向量 (一維, 通常代表一個訊號), 或是一個矩陣 (二維, 通常代表一幅影像)。 首先考慮一維的情形, 假設輸入一個向量, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^t$, $N = 2^J$, 位於 $V_J[0,1]$。 先作凌波分解, 把 $V_J[0,1]$ 分解成在 $V_{J-1}[0,1]$ 的 u 和 $W_{J-1}[0,1]$ 的 w, u 和 w 的長度均是 $\frac{N}{2}$, 它相當是一個矩陣乘法

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

而在程式設計上, 我們把 H 和 G 的列向量交錯排列, 稱爲 L 。則

$$\frac{1}{\sqrt{2}} Lv = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_{\frac{N}{2}} \\ w_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

這樣, 只須一個暫存空間, 就可以把結果直接覆寫在 v 的儲存空間, 然後再把 v 的奇數項排在前半部, 偶數項排在後半部, 回到

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

的形態, 就完成作一次的 DWT。 若覺得解析度還不夠低, 就把 $u \in V_{J-1}[0,1]$, 長度 $\frac{N}{2}$, 重覆上述部驟再做 DWT , 直到滿意的解析度爲止。

反過來, 利用自格等式作合成時, 因爲

$$(\frac{1}{\sqrt{2}} H)^t (\frac{1}{\sqrt{2}} H) + (\frac{1}{\sqrt{2}} G)^t (\frac{1}{\sqrt{2}} G) = I \tag{2.3.1}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}L^t\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_{\frac{N}{2}} \\ w_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix}$$

就完成了凌波合成。

其中有幾個細節敘述於此:

1. 相較於週期化的 DWT , 對於頻率濾波器, 區段上的 DWT 有較多的係數必須紀錄。

2. 前述的分解和合成步驟, 利用到的矩陣 L, 並非紀錄一整個矩陣, 因爲相對應於輸入的向量 v 長度是 N, 則 L 是 $N \times N$ 的矩陣, L 是稀疏而有規則的, 所以我們只紀錄 L 裡非零的部分, 把相對應的 v 或 $(u,w)^t$ 拿出來作乘法, 以節省記憶空間。

3. 如前所述, 作分解與合成時, 都須乘上 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 而 (2.3.1) 又可寫成

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}L)^t(\frac{1}{\sqrt{2}}L) = I$$
$$(\frac{1}{2}L)^tL = L^t(\frac{1}{2}L) = I$$

所以, 我們選擇了在分解時除 2, 以保持低頻數值的相對大小 和原資料一致, 把分解那組係數除 2, 合成時不再除 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 節省計算量。

接著考慮二維的情況, 我們使用最常見的直積模式(Cartesian product), 將雙變數的自格函數視爲

$$\varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

則雙變數的凌波函數爲

$$\psi(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

也就是說, 對於二維的資料把它視爲兩個獨立的一維資料的直積。 假設輸入一個 $N \times N$ 的矩陣, 作 DWT 時, 就把它視爲一組 $N \times 1$ 的行向量和 $1 \times N$ 的列向量, 套用一維的模式, 分別對每個行向量和列向量作 DWT, 即可完成二維的 DWT。

§ 2–4 前濾波器 (prefilter)

在 DWT 的處理過程中, 如同參考書目中[4]所指出, 區段化的 DWT 比週期化的 DWT 留下更大的量在高頻的部分, 如下圖:

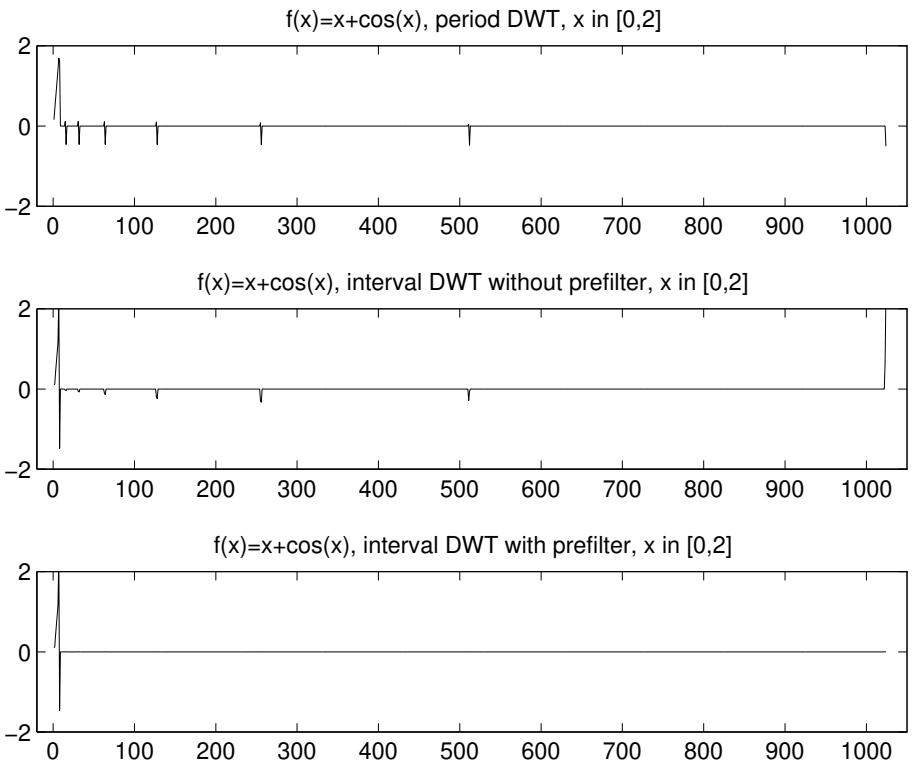


Figure17.

在此我們解釋 $p = 2$ 時的原因, 就理論而言, $p = 2$ 時,階數 0 和 1 的多項式是在 V_j

裡, 也就是一維時

$$1 = \sum_k \langle 1,\ \phi_{jk}\rangle \phi_{jk}$$

$$x = \sum_k \langle x,\ \phi_{jk}\rangle \phi_{jk}$$

其投影係數分別是

$$\langle 1, \phi_{jk}\rangle = 2^{\frac{-j}{2}}, \quad \langle x, \phi_{jk}\rangle = 2^{\frac{-3j}{2}}(k + M_1)$$

所以對應在 V_j 裡的多項式 1, x, 分別是

$$x_0 = (\cdots, 1, 1, 1, \cdots)^t, \quad x_1 = (\cdots, 1, 2, 3, \cdots)^t$$

而在區段上的凌波函數, 雖然仍然保持

$$1 = \sum_{k=-1}^{2^j-2} \langle 1,\ \varphi_{jk}\rangle \varphi_{jk}$$

$$x = \sum_{k=-1}^{2^j-2} \langle x,\ \varphi_{jk}\rangle \varphi_{jk}$$

但其投影係數

$$\begin{pmatrix} \int \varphi_{j,-1} \\ \int \varphi_{j,0} \end{pmatrix} = 2^{\frac{-j}{2}} \cdot S \cdot \tilde{\mathbf{X}} \cdot \begin{pmatrix} K_2^0 \\ K_1^0 \\ K_0^0 \end{pmatrix}$$

不再是如此的整齊, 使其對應在 $V_j[0,1]$ 裡的多項式 1, x, 不再是類似函數點值的 x_0 和 x_1, 所以當輸入 x_0 和 x_1, 區段上的高頻濾波器不再完美的消滅這兩個量, 而在高頻部分留下不可忽視的量。如圖 17 中間的圖。 因此我們導入前濾波器的觀念, 將多項式先轉換成在區段上凌波函數應有的形式, 才作 DWT , 之後再把它反轉換成函數點值的形式, 以降低留在 $W_j[0,1]$ 的量。 如圖 17 下面的圖。 而前濾波器的製作如下:

定義:

$$F_L : \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} \int \phi_{j,-1} \\ \int \phi_{j,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \int x\phi_{j,-1} \\ \int x\phi_{j,0} \end{pmatrix}\} \mapsto \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} \int \varphi_{j,-1} \\ \int \varphi_{j,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int x\varphi_{j,-1} \\ \int x\varphi_{j,0} \end{pmatrix}\}$$

$$F_R : \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} \int \phi_{j,2^j-3} \\ \int \phi_{j,2^j-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int x\phi_{j,2^j-3} \\ \int x\phi_{j,2^j-2} \end{pmatrix}\} \mapsto \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} \int \varphi_{j,2^j-3} \\ \int \varphi_{j,2^j-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int x\varphi_{j,2^j-3} \\ \int x\varphi_{j,2^j-2} \end{pmatrix}\}$$

也就是說

$$F_L : 2^{\frac{-j}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2^{-j}(M_1-1) \\ 1 & 2^{-j}M_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \int \varphi_{j,-1} & \int x\varphi_{j,-1} \\ \int \varphi_{j0} & \int x\varphi_{j0} \end{pmatrix}$$
$$F_R : 2^{\frac{-j}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2^{-j}(M_1+2^j-3) \\ 1 & 2^{-j}(M_1+2^j-2) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \int \varphi_{r_1} & \int x\varphi_{r_1} \\ \int \varphi_{r_2} & \int x\varphi_{r_2} \end{pmatrix}$$

經過整理,

$$F_L : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto S\tilde{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} K_2^0 & -M_1K_2^0+K_2^1 \\ K_1^0 & -M_1K_1^0+K_1^1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$F_R : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto T\tilde{\mathbf{Y}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-K_0^2 & K_2^0(M_1-2)-K_2^1 \\ 1-K_1^0 & K_1^0(M_1-2)-K_1^1+1 \end{pmatrix}$$

其中, $K_n^m = \int_0^\infty x^m \phi(x+n)dx$, $0 \le m \le 1(=p-1)$, $1 \le n \le 2(=2p-2)$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{-2}^0 & x_{-1}^0 & x_0^0 \\ x_{-2}^1 & x_{-1}^1 & x_0^1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_{2^j-3}^0 & y_{2^j-2}^0 & y_{2^j-1}^0 \\ y_{2^j-3}^1 & y_{2^j-2}^1 & y_{2^j-1}^1 \end{pmatrix}$$

是多項式投影係數所形成的矩陣。 則這樣造出來的 F_L, F_R 都是與 j 無關的。 因此, 我們有了 $2 \times 2(= p \times p)$ 的前濾波器 F_L, F_R。

對於一維的資料, 假設輸入 $v = (v_0, v_1, \cdots, v_n)^t$ 先把它經過前濾波器的處理, 轉換成 $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, v_2, \cdots, v_{n-2}, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n)^t$ 其中,

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = F_L \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tilde{v}_{n-1} \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = F_R \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}$$

我們把 $\tilde{v}$ 送去作分解, 重建, 再作反轉換, i.e. 把 $\tilde{v}$ 的頭尾分別乘上 F_L^{-1}, F_R^{-1}。 則這樣經過前濾波器的處理, 就可以使留在 $W_j[0,1]$ 的量減少。 如圖 17 下面的圖。

接下來我們討論二維的情形。 因爲我們採用直積模式, 假設輸入一個 $n \times n$ 的矩陣 A, $A = (a_{ij})$, 經過前濾波器的處理, 把 A 先轉換成 $\tilde{A}$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$,

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = F_L \cdot F_L \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \cdots & \tilde{a}_{1,n-2} \\ \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \cdots & \tilde{a}_{2,n-2} \end{pmatrix} = F_L \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n-2} \\ a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,n-1} & \tilde{a}_{1,n} \\ \tilde{a}_{2,n-1} & \tilde{a}_{2,n} \end{pmatrix} = F_R \cdot F_L \cdot \begin{pmatrix} a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,n-1} & a_{2,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{n-1,1} & \tilde{a}_{n-1,2} \\ \tilde{a}_{n,1} & \tilde{a}_{n,2} \end{pmatrix} = F_L \cdot F_R \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{n-1,3} & \tilde{a}_{n-1,4} & \cdots & \tilde{a}_{n-1,n-2} \\ \tilde{a}_{n,3} & \tilde{a}_{n,4} & \cdots & \tilde{a}_{n,n-2} \end{pmatrix} = F_R \begin{pmatrix} a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n-2} \\ a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{n-2,1} & \tilde{a}_{n-2,2} \end{pmatrix} = F_L \cdot \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{3,n-1} & \tilde{a}_{3,n} \\ \tilde{a}_{4,n-1} & \tilde{a}_{4,n} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{n-2,n-1} & \tilde{a}_{n-2,n} \end{pmatrix} = F_R \cdot \begin{pmatrix} a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{n-1,n-1} & \tilde{a}_{n-1,n} \\ \tilde{a}_{n,n-1} & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix} = F_R \cdot F_R \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

在此我們看到四個角落的 2×2 矩陣都需要乘上兩次的前濾波器, 這是因爲這四個 2×2 的矩陣同時是行或列的最前或最後的部分。 這樣先經過前濾波器的處理, 再作 DWT 就可以使留在高頻部分的值降低。 如圖 17 的最後一個圖。

下面我們看到二維的例子, 比較同樣的矩陣, 使用週期化的 DWT, 區段上的 DWT, 使用前濾波器的處理及不經過前濾波器的處理, 三種方法所得到的結果。

首先, 這是一個代表一幅 256×256, 256 色的灰階影像, 假設它是某一個 V_J 的投影係數,

Figure 18. 原始圖, Tiffany

經過一次的 DWT, 把 V_J 分解成 V_{J-1} 和 W_{J-1}, 再把 W_{J-1} 中絕對值大於 3 的數值, 以黑色點表現出來, 形成類似描邊的效果。 W_{J-1} 就是可以作壓縮的部份。

使用週期化的方法, 也就是把原始函數假設成週期函數, 而使圖形的右上角的右邊及左下角的下面形成一條不自然的黑線。 如圖 19. 註: 高頻的部份有 6131 個點。

使用區段上的 DWT ,不經前濾波器的處理, 除了有週期化 DWT 的缺點外, 右上角圖的左邊也有一條黑線, 而且左下角的上面也有一條黑線。 如圖 20. 註: 高頻的部份有 6997 個點。

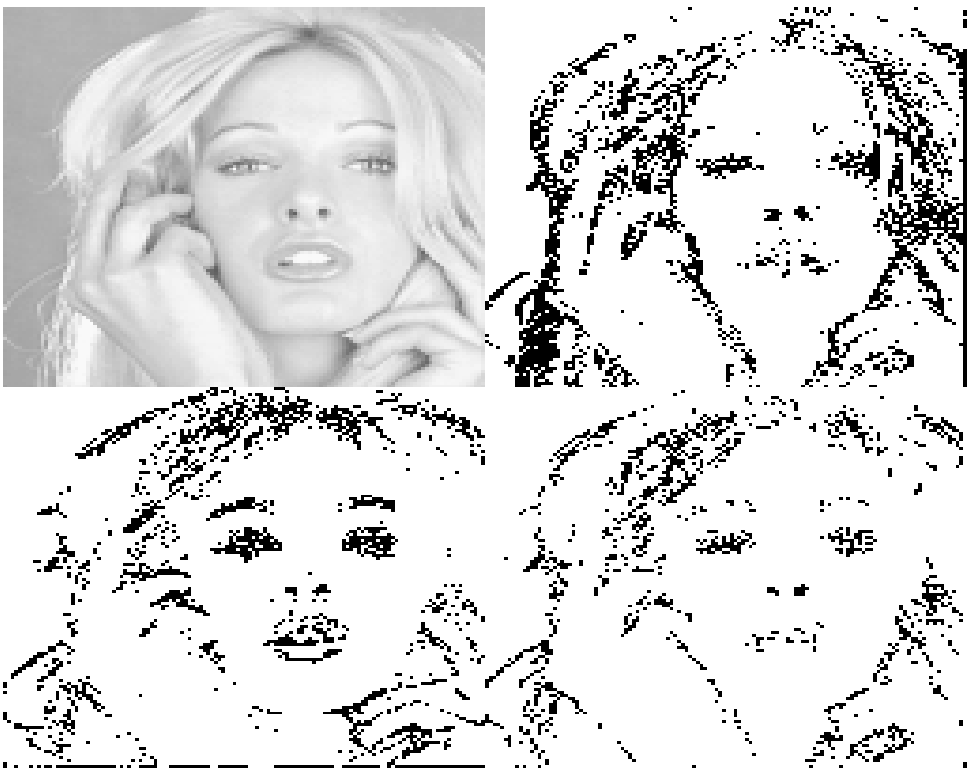


Figure 19. p=2, period DWT cut criteria 3,compress rate 1:8

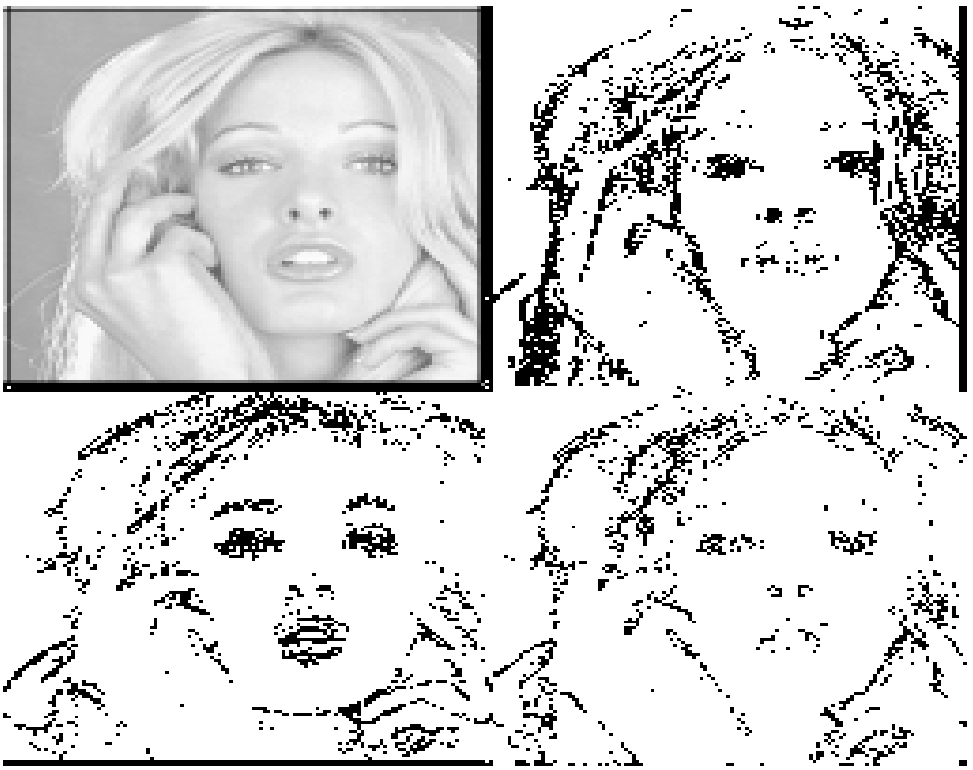


Figure 20. p=2, interval DWT without prefilter cut criteria 3, compress rate 1:7

若先經過前濾波器的處理, 則區段上的 DWT , 可以使高頻部份沒有不應有的黑線, 而低頻部份因先乘上前濾波器, 使左上角的圖形形成黑色邊框。 在此我們看到區段上的 DWT , 經前濾波器的處理, 改善了週期化 DWT 在高頻部份的缺點。 如圖 21. 註: 高頻的部份有 6057 個點。

若再作一次 DWT , 黑色邊框仍留在 V_{J-2} 低頻部份, 如圖 22.

若要消除邊框, 可以把 V_{J-2} 的部份乘上對應的逆前濾波器, 就可達到週期化 DWT 在低頻部份的表現。 如圖 23. 所示。

圖 24. 我們展示用區段上的 DWT , 經前濾波器的處理, 作一層的凌波分解, 以 3 爲截斷標準, (也就是只保留 W_{J-1} 中絕對值大過 3 的部份, 其餘歸零) 再重建回來的圖。 它的相對誤差是 0.0058 (週期化的 DWT , 其相對誤差是 0.0066)。

Figure 21. p=2, interval DWT with prefilter cut criteria 3, compress rate 1:8

Figure 22. p=2, interval DWT with prefilter cut criteria 3

Figure 23. p=2, interval DWT with prefilter cut criteria 3

Figure 24. p=2, interval DWT with prefilter reconstruct one level

另一個測試圖是一個對稱, 在對角線上不連續, 其餘爲平滑遞減的矩陣

$$A = \begin{cases} -1 & i = j \\ \frac{1}{\sqrt{|i-j|}} & i \neq j \end{cases}$$

使用 DWT , 把 A 轉換到凌波空間, 稱之爲 B, 選取 B 中最大的 22% 以黑色表現。 則我們看到若使用週期化的 DWT, 會因爲假設成週期的函數, 而形成不該有的不連續點, 而使其出現不該有的直線和橫線。 若使用區段上的 DWT, 不經過前濾波器的處理, 與前面圖 18 的例子相同, 並沒有比週期化的 DWT 更好, 反而更差。

若使用區段上的 DWT, 先經過前濾波器的處理, 就可以把邊緣的部分處理得很乾淨。如圖 27.

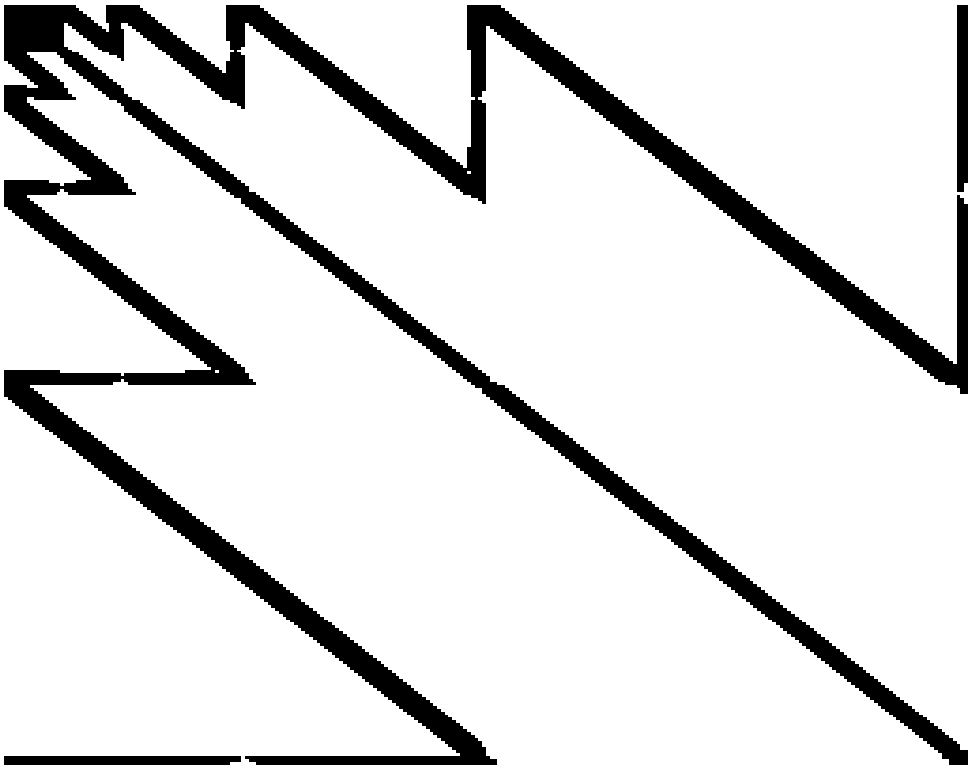


Figure 25. p=4, period DWT

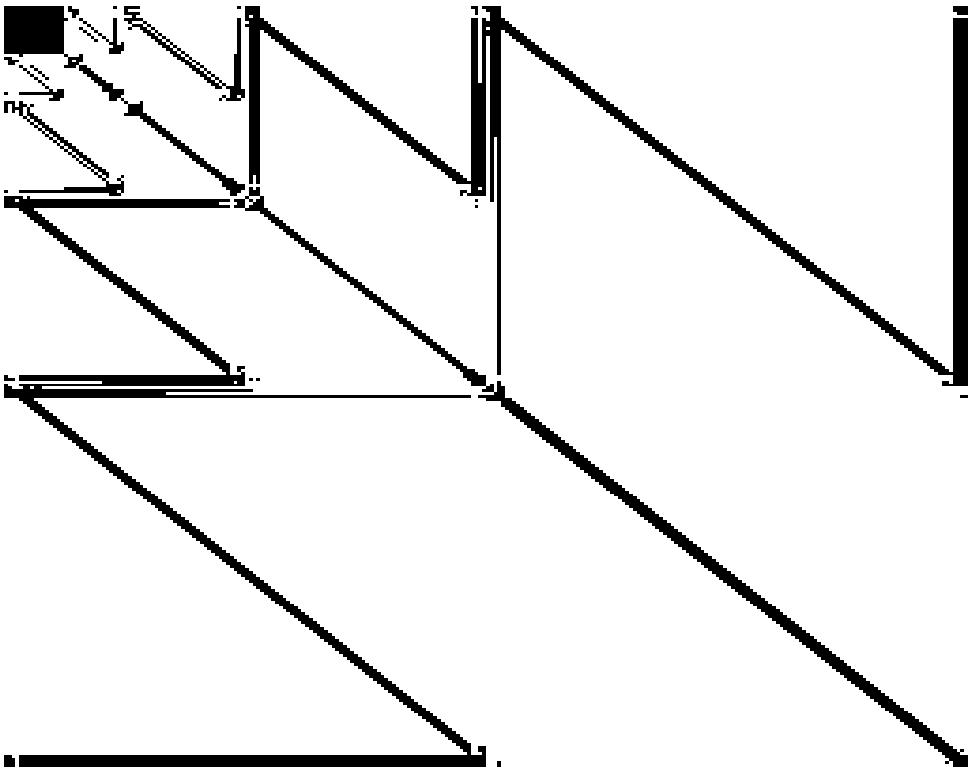


Figure 26. p=4, interval DWT without prefilter

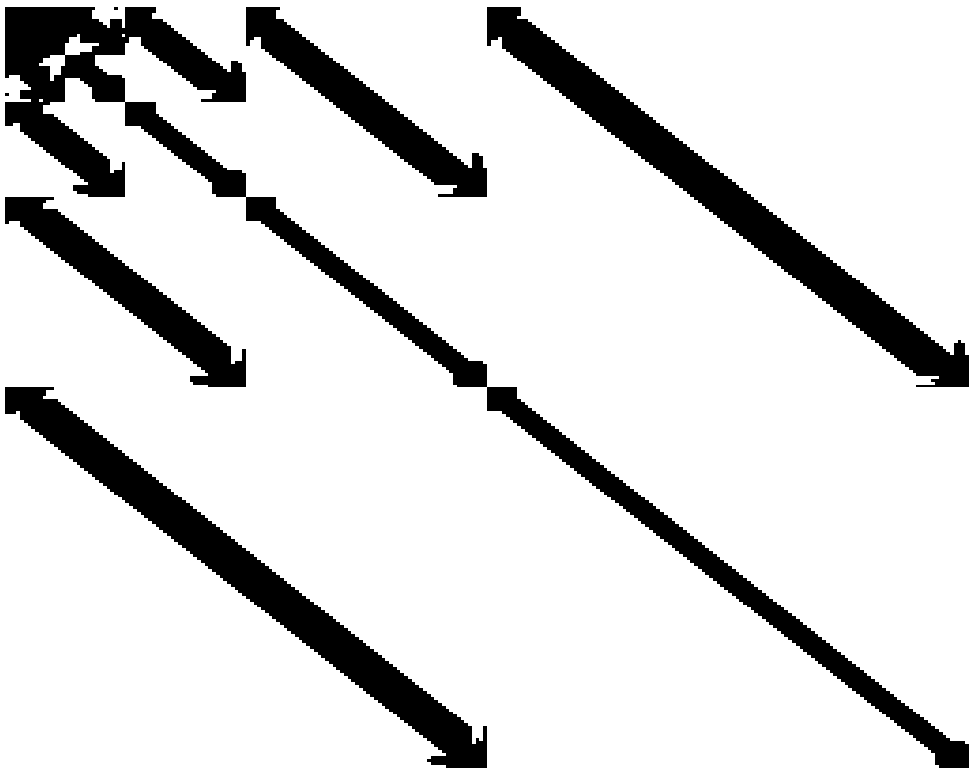


Figure 27. p=4, interval DWT with prefilter

在此, 列出這三個方法經凌波重建後的誤差比較。

256×256 的矩陣 A	絕對誤差	相對誤差
週期化的 DWT	0.0046	1.1919×10^{-4}
區段上的 DWT, 不經前濾波器處理	0.6540	0.0168
區段上的 DWT, 經前濾波器處理	0.0014	3.5432×10^{-5}

以下我們分別比較週期化的 DWT, 區段上的 DWT,作或不作前濾波器的處理, 分解至最低層, 再重建回來之後與原始資料的誤差 (l_2 norm) 比較。

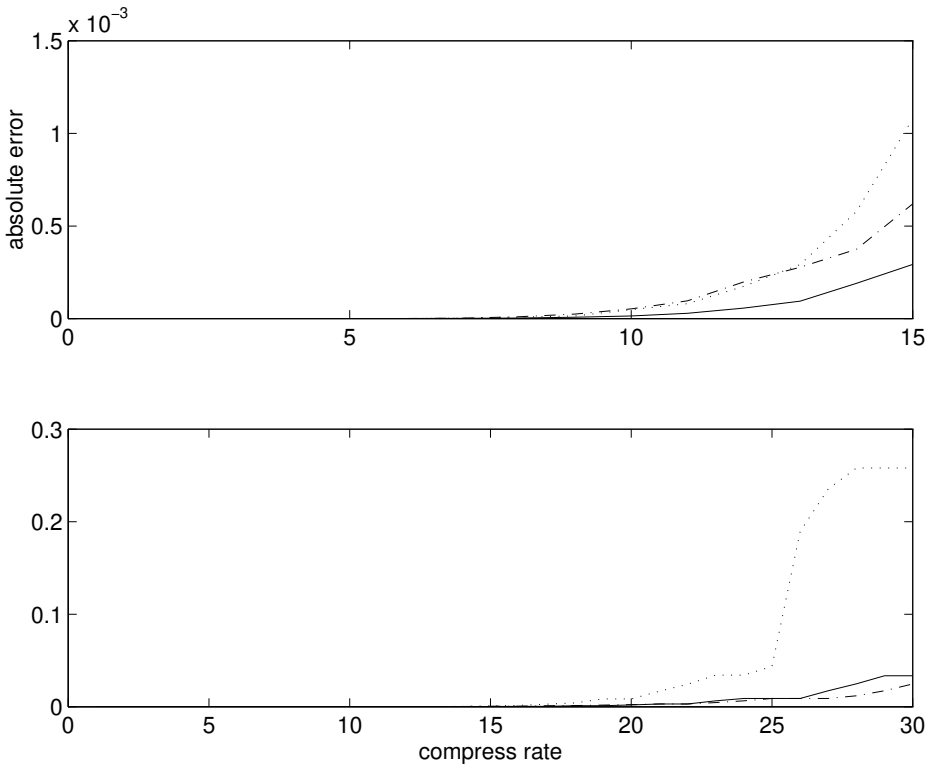


Figure 28.

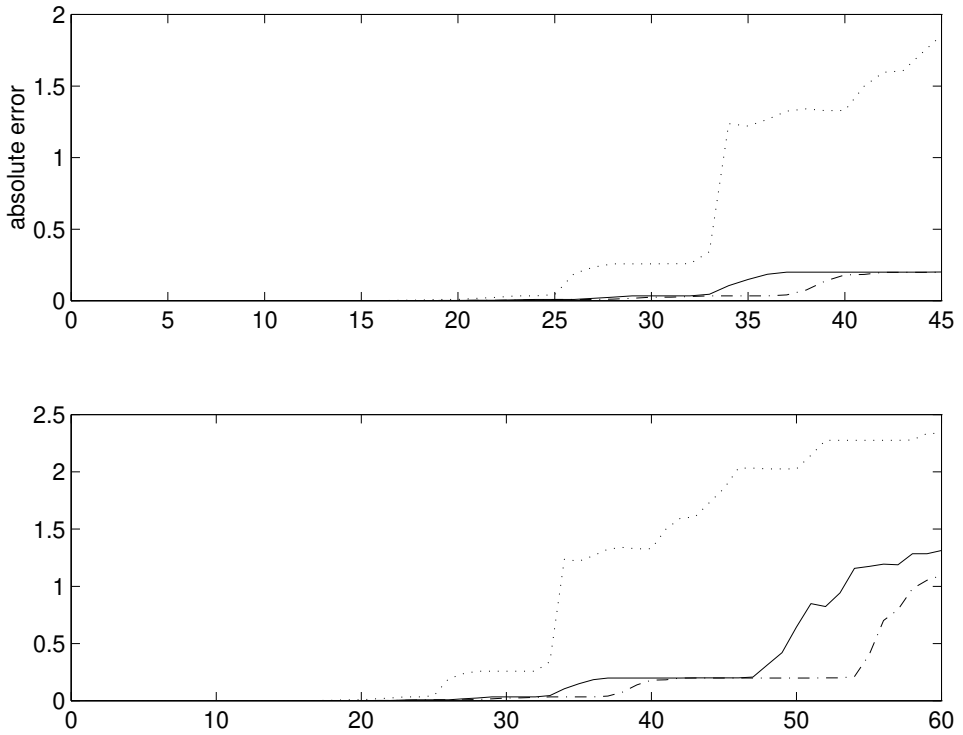


Figure 29. test2d, p=2, -:period, -.:prefiter, .:no prefiter

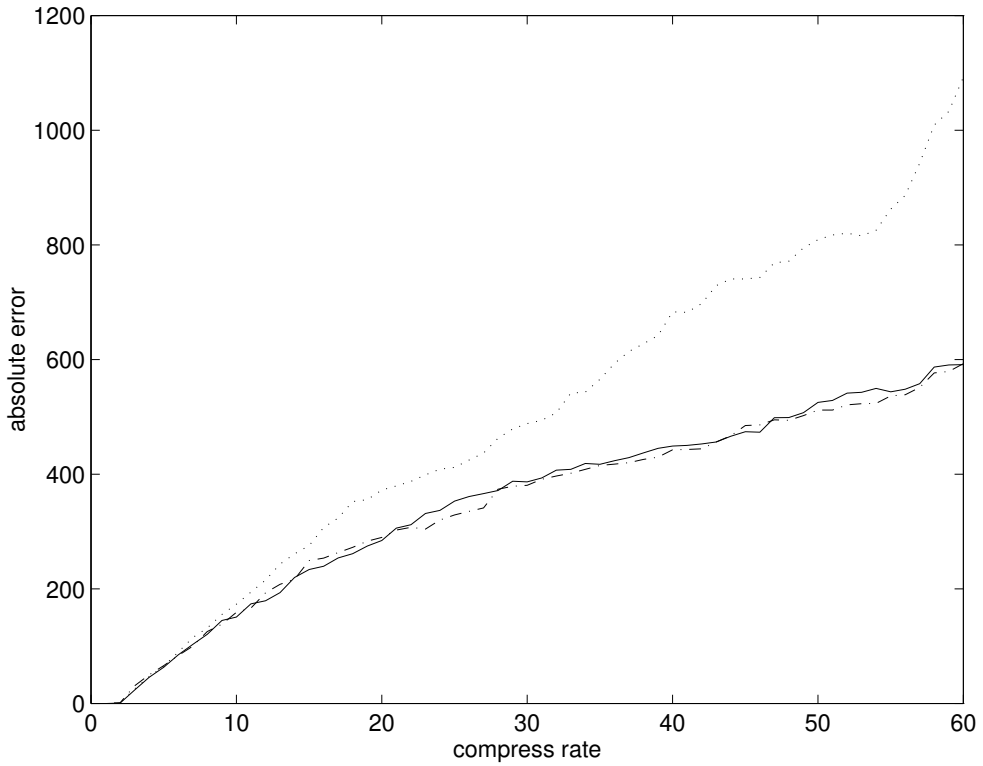


Figure 30. Tiffany, p=2, -:period, -.:prefiter, .:no prefilter

由圖 28, 29, 和 30 得知, 在 $p = 2$ 時, 經前濾波器處理區段上的 DWT, 與週期化的 DWT, 隨著壓縮比例的增加 對於 Tiffany 的圖其誤差是差不多相同的, 但對於矩陣 A, 則區段上的 DWT有較差的表現。

區段上的 DWT 是爲了改善 週期化的 DWT 在高頻邊界留下的值所產生的。 所以最後我們整個比較一下區段上的 DWT 與週期化的 DWT 。

1. 週期化的 DWT 只須紀錄一組長度爲 $2p$ 的係數作爲其高低頻濾波器。 而區段上的 DWT 除了這組係數外, 還須額外紀錄處理靠邊界的係數, 即 $H_{LL}, H_{LI}, H_{RI}, H_{RR}, G_{LL}, G_{LI}, G_{RI}, G_{RR}$

2. 由實驗得知, 區段上的 DWT 一定要作前濾波器的處理, 否則其壓縮比例會比週期

化的 DWT 更低。

3. 雖然我們把前濾波器的處理簡化到只須在作 DWT 之前和之後各作一次即可, 但仍增加了計算量(一維時, 假設輸入 $N \times 1$ 的向量, 共增加了 $4p$, 二維時, 假設輸入 $N \times N$ 的矩陣, 則共增加了 $8pN$)。

雖然區段上的 DWT 眞的達到了它的目的, 但是得到的效果確是相當的有限。 以圖 18 爲例, 3 爲截斷標準, 只作一層的 DWT ,

Tiffany 圖	原始所佔記憶體	壓縮後所佔記憶體
週期化 DWT	136239 bytes	24785 bytes
區段上 DWT 經前濾波器處理	136240 bytes	24741 bytes

所以如果函數的邊界原本就有較大的"跳躍(jump)", 也就是原本就應該有較大的值留在高頻, 則應採用週期化的 DWT , 反之, 才採用區段上的 DWT , 以提高壓縮比例。

附　錄

在程式方面: 存在 zhenj/matlab/interval/*.m

Sj.m	S=Sj(p,j)	第j層是哪些k屬於左中右
phi_coef.m	[x,y]=phi_coef(p,j)	多項式投影於 V_j 的投影係數
phi_proj.m	[X,Y,xl,xr]=phi_proj(p,j)	投影函數
phi_mass.m	[XX,YY]=phi_mass(p)	投影函數的質量矩陣
sqrt_phimass.m	[S,T]=sqrt_phimass(p)	(質量矩陣)$^{-\frac{1}{2}}$
or_phi.m	orphi=or_phi(p,j)	正則自格函數
phi_relation.m	[H_LL,H_LI,H_RI,H_RR]=jlow_pass(p)	低頻濾波器
(testH.m)		

存在 zhenj/matlab/interval/Ideal/*.m

psi_proj.m	[Z,W,xl,xr]=psi_proj(p,j)	投影函數
psi_mass.m	[ZZ,WW]=psi_mass(p)	質量矩陣
sqrt_psimass.m	[U,V]=sqrt_psimass(p)	(質量矩陣)$^{-\frac{1}{2}}$
or_psi.m	orpsi=or_psi(p,j)	正則凌波函數
psi_relatrion.m	[G_LL,G_LI,G_RI,G_RR]=jhigh_pass(p)	高頻濾波器
(testG.m)		

存在 zhenj/matlab/interval/*.m

I_phi.m	[IphiL,IphiR] = I_phi(p,j)	在[0,1]計算 moment
I_orphi.m	[IorphiL,IorphiR] = I_orphi(p,j)	區段凌波函數的 moment
prefilter.m	[fL,fR] = prefilter(p,j)	計算前濾波器

存在 zhenj/matlab/application/*.m

dwt.m	X=dwt(p,X,case,level,method)	週期化, 區段上作(或不作)前濾波器處理
pref.m	X=pref(p,X)	把 X 的週邊作前濾波器處理
revpref.m	X=revpref(p, X)	把 X 的週邊作逆前濾波器處理
test2d.m	M=test2d(n)	產生 $n \times n$ 的測驗矩陣
bgw.m	[Y, map]=bgw(X, pick1, pick2)	把 X 分成白灰黑三個顏色
mirror.m	y=mirror(x)	把 x 翻過來排列, 並把偶數項加上負號
jdwt.m	X=jdwt(p,X,case,level)	區段上的 DWT , 含 全分解, 半分解
jwc.m	x=jwc(p,x,coef,L,H,left,right)	區段上 DWT 的凌波分解
jwd.m	x=jwd(p,x,L,H,left,right)	區段上 DWT 的凌波合成
jwf.m	x=jwf(p,x,L,H,left,right)	jwd.m 的子程式
sort.m	cut=sortm(A,k)	找出矩陣 A 中絕對值第 k 個大的數

參考書目

[1] L. ANDERSSON, N. HALL, B. JAWERTH AND G. PETERS, Wavelets on cloesd subsets of the real line, in "Recent advances in wavelet analysis," Academic Press, Boston, 1994, pp. 1-61.

[2] J. CHENG, The construction of wavelets on the interval and a prefilter process for wavelet transforms, Master Dissertation, Department of Mathematics, National Central University, 1995.

[3] A. COHEN, I. DAUBECHIES, B. JAWERTH AND P. VIAL, Multiresolution analysis wavelets and fast algorithms on the interval, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 316 (1992), pp. 417-421.

[4] A. COHEN, I. DAUBECHIES AND P. VIAL, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, Appl. Comput. Harmonic Anal., 1 (1993), pp. 54-81.

[5] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math., 41(1988), pp. 909-996.

[6] I. DAUBECHIES, "Ten lectures on wavelets," SIAM, Philadelphia, 1992.

[7] S. MALLAT, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$, Trans. Amer. Math. Soc., 315(1989), pp. 69-87.

[8] S. MALLAT, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Intell., 11(1989), pp. 674-693.

[9] Y. MEYER, "Ondelletes et fonctions splines, " Seminaire Equations aux Derivees Partielles, Ecole Polytechnique, Paris, 1986.

[10] Y. MEYER, Ondelettes sur l'intervalle, Rev. Math. Iberoamer., 7 (1992), pp. 115-133.

[11] W.-C. SHANN AND C.-C. YEN, Quadratures involving polynomials and Daubechies' wavelets, Technical Report 9301, Department of Mahtematics, National Cen-

tral University, 1993.

[12] G. STRANG, Wavelets and dilation equations: A brief introduction, SIAM Review, 31(1989), pp. 614-627.