反函數

姓名 80000000

July 6, 2002

函數 $f(x)$ 的反函數符號是 $f^{-1}(x)$，一不小心就會以為那是 $\frac{1}{f(x)}$。例如從華氏溫度 (F) 轉換到攝氏溫度 (C) 的公式

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

可以視為 C 是 F 的函數，記做 $C = T(F)$。則 T 的反函數 T^{-1} 就是從攝氏到華氏的轉換公式。也就是用 C 來求解 F 的等式：

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \Longrightarrow \frac{9}{5}C = F - 32 \Longrightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$$

因此 $T^{-1}(C) = \frac{9}{5}C + 32$。

若 $y = f(x)$ 可微，而且 $x = f^{-1}(y)$ 存在，反函數的導函數公式為

$$(f^{-1}(y))' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

例如前面的

$$\frac{d}{dC}T^{-1}(C) = \frac{9}{5} = \frac{1}{T'(F)} = \frac{1}{\dfrac{5}{9}}$$