

綜合除法

單維彰・2015 年 1 月

綜合除法是西元 1200 年前後，中國宋朝時期的知識份子賈憲和秦九韶，陸續發展出來的一種特殊的多項式除法：除式是 $x - a$ 這種一次式的多項式除法。

先用一個具體例子來說明。用傳統的除法做 $(2x^3 - 3x^2 - 4x + 5) \div (x - 2)$ ：

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 2 \\ \hline x - 2 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ x^2 - 4x \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -2x + 5 \\ \underline{-2x + 4} \\ 1 \end{array}$$

得到

$$(2x^3 - 3x^2 - 4x + 5) \div (x - 2) = (2x^2 + x - 2) \dots 1$$

以下，我們用同樣的算式來發展綜合除法，然後跟它對答案。

在我們進行之前，先複習除法原理：

$$P \div S = Q \dots r \quad \longleftrightarrow \quad P = Q \times S + r$$

例如以上除法算式就可以改寫成

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = (2x^2 + x - 2)(x - 2) + 1$$

不妨用直式乘法驗算：

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 2 \\ \times \quad x - 2 \\ \hline -4x^2 - 2x + 4 \\ 2x^3 + x^2 - 2x \\ \hline 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \end{array}$$

所以 $(2x^2 + x - 2)(x - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ ，再加 1 就是原來的被除式

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5。$$

現在來發展綜合除法。首先，我們知道商式比被除式低一次，而且餘下的一定是個數，所以

$$(2x^3 - 3x^2 - 4x + 5) \div (x - 2) = (b_2x^2 + b_1x + b_0) \dots r$$

運用除法原理，寫成等式

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 &= (b_2x^2 + b_1x + b_0)(x - 2) + r \\ &= b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - 2b_2x^2 - 2b_1x - 2b_0 + r \\ &= b_2x^3 + (b_1 - 2b_2)x^2 + (b_0 - 2b_1)x + (r - 2b_0) \end{aligned}$$

由高次到低次，比較上下兩式的係數：

由 x^3 項： $b_2 = 2$

由 x^2 項： $b_1 - 2b_2 = -3$ ，得到 $b_1 = -3 + 2b_2$ ，

代入前一步知道的 b_2 算出 $b_1 = 1$

由 x 項： $b_0 - 2b_1 = -4$ ，得到 $b_0 = -4 + 2b_1$ ，

代入前一步知道的 b_1 算出 $b_0 = -2$

由常數項： $r - 2b_0 = 5$ ，得到 $r = 5 + 2b_0$ ，

代入前一步知道的 b_0 算出 $r = 1$

完成。

從前面獲得的係數 b_2 ， b_1 ， b_0 和 r ，讀出商式及餘數為 $(2x^2 + x - 2) \dots 1$ ，當然跟前面的結果相同。

中國人發明綜合除法，用一組簡單而且重複的動作完成前面的計算。綜合除法的原理，已經如上說明了。因為這個算法的本質是一系列的操作程序，用書面文字說明反而冗長，請看影片教學。