

函數圖形

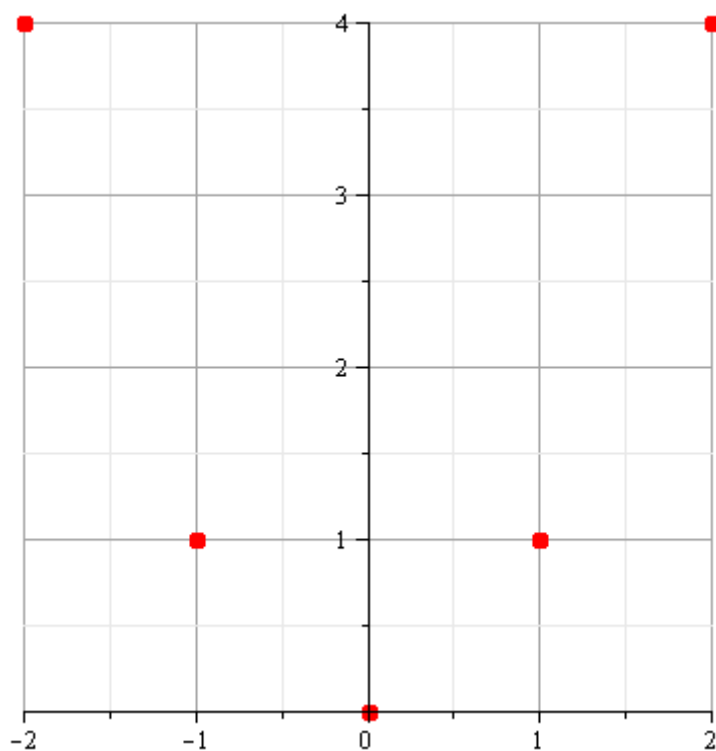
單維彰・2014 年 3 月

究竟什麼是函數圖形？以前教師經常用少數幾個點「連」成一條曲線，這個觀念並不完全正確。函數 $f(x)$ 的圖形，是所有滿足 $y = f(x)$ 的點 (x, y) 在坐標平面上聚集而成的圖形。現在用電腦繪圖來表現，函數圖形是由非常多個點「聚」成的一條曲線，而不是連成的。

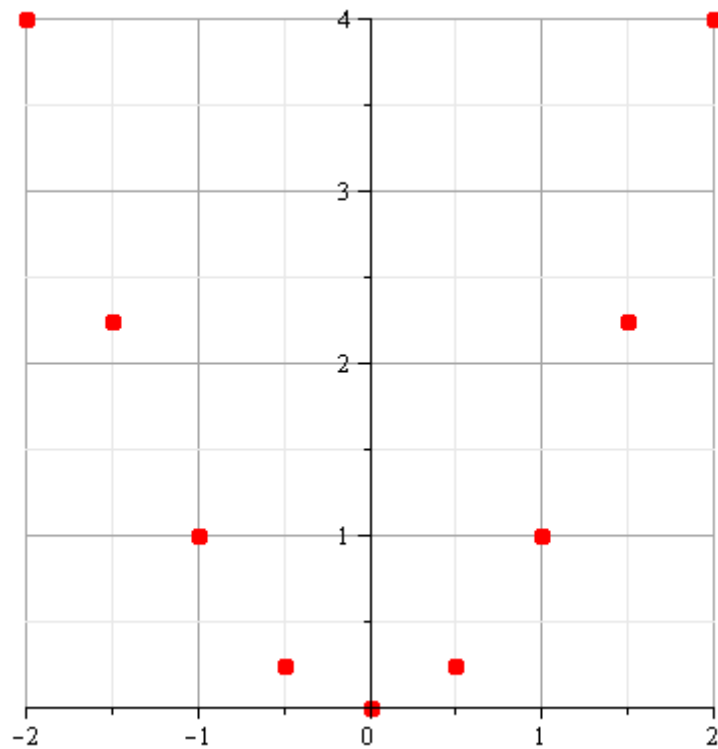
影片裡面舉例，考慮 $f(x) = x^2$ ，我們在 $-2 \leq x \leq 2$ 範圍內繪圖。先選 x 是整數點 $0, \pm 1, \pm 2$ ，他們對應的函數值 $y = f(x)$ 就是

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

在 xy 坐標平面上，兩個數 (x, y) 就對應一個點。我們把表格上的點畫到坐標平面上，注意我們只畫出 x 介於正負 2， y 介於 0 和 4 之間的部分平面。理論上點沒有面積，但是誇張畫很大點（小圓盤），看到 5 個點，如下圖。



現在，把 x 是二分之多少的數也算出來，因為分子是偶數 $0, \pm 2, \pm 4$ 的時候，跟分母 2 約去，就回到整數，所以我只要增加分子是奇數的情況： $\pm 1, \pm 3$ ，新增加 4 個點，如下圖。



我們照這樣繼續，剛才我們用 $1/2$ 把正負 2 的區間割成 8 段，現在每段再切一半，我再增加 x 是分母為 4 的數。同理，分子是偶數的情況已經畫好了，例如 $2/4$ 就是 $1/2$ ， $-4/4$ 就是 -1 。所以我們還是只要新增分子是奇數的 $x = \pm \frac{1, 3, 5, 7}{4}$ 共 8 個點。我們不再畫圖，請看授課影片。

大家可以觀察，畫的點越多，不會亂跑，會逐漸出現規律。繼續增加點的數量，大家應該可以明白，畫面上根本沒有畫所謂的曲線，而是 129 個（大大的）點聚集起來的樣子。

當然我的點畫得誇張大，但是已經可以明白，就算把點畫得很小，只要畫很多很多點，那些點就會聚成一條曲線。如果我用 600 點，就會畫成大家熟悉的 $y = x^2$ 曲線