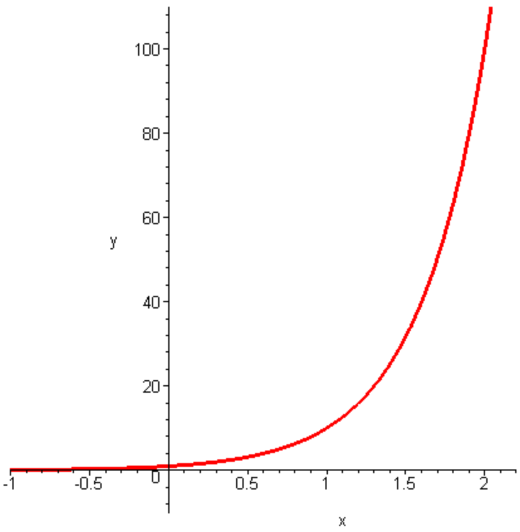
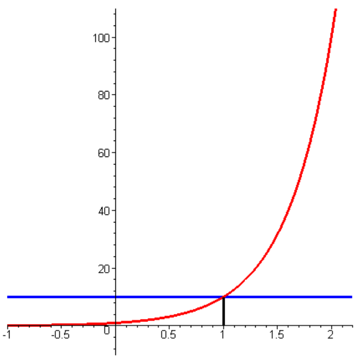
對數

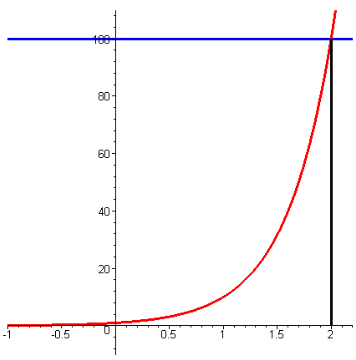
單維彰・2014 年 4 月

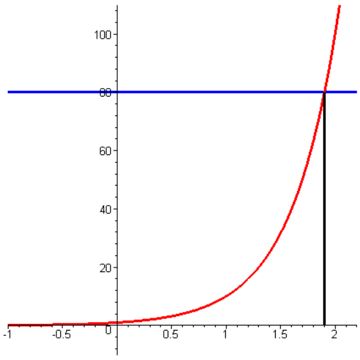


再回顧函數 10^x 的圖形（如右圖），因為它增長得太快，我們採用了 x 軸、y 軸不同單位長的坐標畫法。

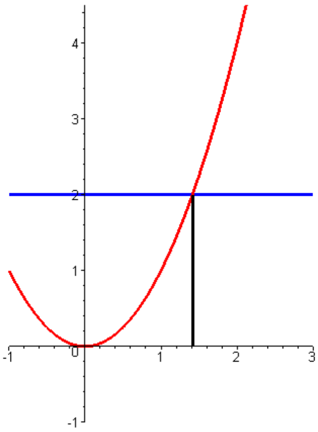
這條函數曲線與水平線 $y=10$ 有一個交點，我們可以輕易地明白：交點的 x 坐標是 1，因為 $10^1=10$；如以下的左圖。同理，函數曲線與水平線 $y=100$ 也有一個交點，交點的 x 坐標是 2，因為 $10^2=100$；如以下中間的圖片。很明顯地，只要 $b>0$，函數圖形與任何一條水平線 $y=b$ 都有一個交點。例如它跟 $y=80$ 也有一個交點，如以下的右圖。但是，這個交點的 x 坐標，可就不容易說出數值了。







像這樣「**在概念上有一個數，卻不容易說出它的數詞**」的情況，我們已經有過經驗。例如，在概念上函數 x^2 的圖形與水平線 $y=2$ 在第一象限有一個交點，如右圖，這個交點的 x 坐標明明是一個數，我們卻無法說出它的數值。同學已經知道，數學的辦法就是給它一個符號。在右圖的例子裡，那個 x 坐標的數就記作 $\sqrt{x}$ 。



類似地，對於 $y=10^x$ 與 $y=80$ 的交點 x 坐標，也就是使得 $10^x=80$ 的解 x，這個概念上明明存在的數，我們不容易說出它的數值，就先給它一個符號： $\log 80$ ，讀作ㄌㄛㄍ 80，稱為 80 的**對數**。

一般而言，我們得知：對任何正數 a，它必定是 10 的某次方；也就是 $10^x=a$ 必定有解，這個解記作 $\log a$ 。簡單地說：

$$對任何\ a>0：10^{\log a}=a$$

從**指數律**可以推論所謂的**對數律**。例如 $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$ 可以推論乘法的對數律：

$$\log(ab)=\log a+\log b\text{，其中 }a\text{、}b\text{ 為正數}$$

舉例而言：一方面 $12=10^{\log 12}$，另一方面 $12=3\times 4$，而 $3=10^{\log 3}$ 、 $4=10^{\log 4}$ ，所以

$$12=10^{\log 12}=10^{\log 3}\times 10^{\log 4}=10^{\log 3+\log 4}$$

比較 $10^{\log 12}$ 和 $10^{\log 3+\log 4}$ 的指數，我們發現 $\log 12=\log 3+\log 4$ 。

乘法對數律的一個應用範例是：假如我們知道 $\log 2\approx 0.30103$ ，則因為 $\log 10=1$ 而且 $\log 10=\log(2\times 5)=\log 2+\log 5$，所以 $\log 5=1-\log 2\approx 0.69897$。同理， $\log 8=\log(2\times 2\times 2)=3\log 2\approx 0.9031$ 。因此，前一頁想要知道的 $\log 80$ 就是 $\log(8\times 10)=\log 8+1\approx 1.9031$ 。

從乘法的對數律可以推論除法的對數律：因為 $\log\frac{a}{b}+\log b=\log a$ ，所以

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$

最後，從 $a^x=10^{\log a^x}$ 以及 $a^x=\left(10^{\log a}\right)^x=10^{x\log a}$，比較 $10^{\log a^x}$ 和 $10^{x\log a}$ 的指數，我們就獲得了次方的對數律：

$$\log a^x=x\log a$$

舉例而言，假如我們知道 $\log 3\approx 0.4771$ ，則

$$\log 81=\log 3^4=4\log 3\approx 1.9084$$

這個 $\log 81$ 的數值很接近前面說的 $\log 80$ 。

有了對數符號之後，可以用它來對付簡單的指數方程 $a^x=b$。這個方程的解法是：先在等號兩邊取 log，得到 $\log a^x=\log b$ ，然後運用次方的對數律轉換成 $x\log a=\log b$ ，因此得到解：

$$x=\frac{\log b}{\log a}$$

這只是符號上的解，如果要知道數值（近似值），還是得使用計算機。