

函數與反函數（下：圖形）

單維彰・2021 年 2 月

有許多情形，我們不方便，或沒必要，或幾乎不可能用代數式寫出反函數。這時候，可以用圖形表達。

我們已經知道，如果函數 f 有反函數 f^{-1} ，則 f 可以寫成 x 的函數 $y = f(x)$ ， f^{-1} 可以寫成 y 的函數 $x = f^{-1}(y)$ 。而 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 的方程式圖形是同一條曲線：因為凡是滿足 $y = f(x)$ 的有序對 (x, y) ，同時也滿足 $x = f^{-1}(y)$ 。舉例而言：

$$y = \frac{3}{2}x - 3 \text{ 和 } x = \frac{2}{3}y + 2 \text{ 是等價的方程式，它們的圖形是同一條直線。}$$

因為 $y = f(x)$ 是 x 的函數，它的圖形可通過鉛直線檢驗：每條鉛直線與 $y = f(x)$ 的圖形最多交於一點；同理，因為 $x = f^{-1}(y)$ 是 y 的函數，它的圖形可通過水平線檢驗：每條水平線與 $x = f^{-1}(y)$ 的圖形最多交於一點。而 $y = f(x)$ 與 $x = f^{-1}(y)$ 的圖形是同一條曲線，這就表明了：函數 f 的圖形同時滿足鉛直線檢驗和水平線檢驗。

以上特例，其實是函數是否有反函數的圖形檢驗法：

若函數 $f(x)$ 的圖形同時滿足鉛直線檢驗和水平線檢驗，則它有反函數。

〔定義〕

如果一個函數的圖形滿足水平線檢驗，稱它為一對一函數（one to one function）。

應用以上定義，前面的結論也可以改寫成：

一對一函數有反函數。

如果把 f 的反函數 f^{-1} 寫成 y 的函數，則反函數圖形根本就和函數圖形一樣。可是數學習慣把自變數設定在橫軸（ x 軸），所以要將反函數 $x = f^{-1}(y)$ 的 x 、 y 對調，記作 $x \leftrightarrow y$ ，然後重新畫反函數 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形。

這件事並不太複雜。關鍵是明白 $x \leftrightarrow y$ 的作用就是：

$$\text{有序對 } (x, y) \text{ 滿足 } x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow \text{有序對 } (y, x) \text{ 滿足 } y = f^{-1}(x)$$

而坐標平面上 (x, y) 和 (y, x) 這兩點對稱於直線 $y = x$ ，也就是通過原點且仰角為 45° 的直線。也就是說：反函數 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形與 $x = f^{-1}(y)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ；可是 $x = f^{-1}(y)$ 的圖形就是 $y = f(x)$ 的圖形，所以結論是：

反函數 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形是 $y = f(x)$ 的圖形對直線 $y = x$ 的鏡射。

前面已經從代數面向知道二次函數 $f(x)=x^2$ （在實數上）沒有反函數，這是因為它的函數圖形不符合水平線檢驗。可是，如果我們將 $f(x)=x^2$ 限制在 $x \geq 0$ 的範圍內，則限縮的函數圖形就同時滿足鉛直線檢驗和水平線檢驗了。因此

$$f(x)=x^2, \text{ 其中 } x \geq 0, \text{ 有反函數 } f^{-1}(x)=\sqrt{x}, \text{ 其中 } x \geq 0。$$

觀察 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的圖形（限定於 $x \geq 0$ ）對稱於直線 $y=x$ 。

再舉一個例子。我們已經知道圓方程式 $x^2+y^2=1$ 既不滿足鉛直線檢驗也不滿足水平線檢驗。可是，如果限定圖形在第一象限（及其邊界），也就是限定 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ ，則其圖形是四分之一個單位圓，它就同時符合鉛直線檢驗和水平線檢驗，於是它不但可以成為一個函數，而且有反函數。按照慣例，仍以 x 為自變數，則四分之一單位圓的方程式是 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，其中 $x \geq 0$ ，也可以寫成 $x=\sqrt{1-y^2}$ ，其中 $y \geq 0$ 。可見，以四分之一單位圓為圖形的函數是 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ，其中 $x \geq 0$ ，而它的反函數是 $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$ ，其中 $x \geq 0$ ：正、反兩函數一樣。其實道理很簡單：因為四分之一單位圓對稱於直線 $y=x$ ，所以鏡射之後並不改變。