n 次函數的極值

單維彰・2013 年 4 月

給一個 n 次多項式函數，討論 $n \geq 3$ 的情況，我們要推導出一套方法，計算在哪些點上，函數圖形有可能發生它的極大或極小值。

一般的 n 次多項式函數

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 \quad ，n \geq 3 \;，a_n \neq 0$$

令 c_1 是 f 以 a 為參考點的泰勒一次項係數，我們知道不同的函數會有不一樣的一次項係數，所以 c_1 跟 f 是有關的，而同一個函數在 $a=1$ 和 $a=2$ 和 $a=-1$ 處的一次項係數，當然也都是不相同的，所以 c_1 跟 a 也是有關的。故我們又可以記作[1] $c_1 = f'(a)$。那麼，c_1 有沒有公式呢？

我們先舉一個基本的例子：首項係數為 1 的單項函數 $f(x) = x^n$，那麼 $f'(a)$ 代表的是什麼意思呢？根據定義，$f'(a)$ 是函數 $f(x) = x^n$ 在 $x = a$ 的泰勒一次項係數，利用綜合除法

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad 0 \quad 0}}^{n\text{ 個 }0}} & \\
1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & 0 & \underline{a} \\
 & a & a^2 & \ldots\ldots & & a^n & \\
\hline
\multicolumn{5}{l}{\underbrace{1 \quad a \quad a^2 \quad \ldots\ldots \quad a^{n-1}}_{q_1(x)\text{的係數}}} & a^n \longrightarrow f(a) &
\end{array}$$

在先前我們已知 $f'(a)$ 就是商式 $q_1(a)$ 對 $x-a$ 再做一次綜合除法的餘式，而且我們又可以根據餘數定律知道，餘式其實就是 $q_1(a)$，所以我們可得到

$$q_1(x) = x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots\ldots + a^{n-1}$$

而 $f'(a)$ 就是將 $x = a$ 代入商式 $q_1(a)$，我們得到

$$\begin{aligned}
f'(a) &= a^{n-1} + a a^{n-2} + a^2 a^{n-3} + \ldots\ldots + a^{n-1} \\
&= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots\ldots + a^{n-1}}_{n\text{ 個 }a^{n-1}} \\
&= n a^{n-1}
\end{aligned}$$

我們記作 $(x^n)' = n x^{n-1}$。

---

[1]因為 c_1 跟 f 和 a 有關，且又跟 f 不一樣，故我們以 f ’表示，讀作 f prime。這是早年牛頓跟萊布尼茲使用過的符號。

接下來，我們介紹「線性性質」，給兩個多項式函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，則

$$\begin{cases}[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)\\ [\alpha f(x)]'=\alpha f'(x),\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

上述中，使用的符號「'」，我們稱作「微分」。而經過微分後，計算出的另一個函數，我們稱為原來函數的「導函數[2]」。

以下舉一例，對二次多項式函數 $3x^2+x-1$ 做微分

$$\begin{aligned}&(3x^2+x-1)'\\ &=(3x^2)'+(x)'+(-1)' && \text{(根據線性性質第 1 條)}\\ &=3(x^2)'+(x)'-(1)' && \text{(根據線性性質第 2 條)}\\ &=6x+1 && \text{(根據導函數公式)}\end{aligned}$$

依此類推，任何一個多項式函數的導函數都可以這麼計算，對一個三次多項式函數做簡單的測試

$$f(x)=x^3-x^2-x-1$$
$$f'(x)=3x^2-2x-1$$

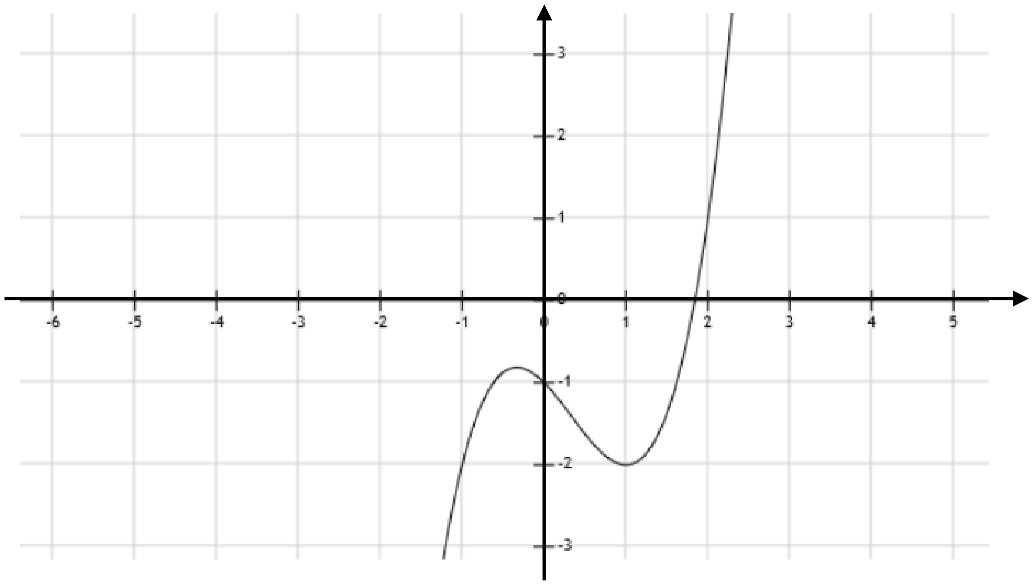
我們得到 $f'(x)$ 是一個二次函數，而這個二次函數可以幫助我們算出可能發生極大或極小值的點。所以，我們要求 a 使得 a 滿足 $f'(a)=0$ ，亦即要求出 $f'(x)=0$ 的根。

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-2x-1\\ &=(x-1)(3x+1)\end{aligned}$$
$$x=1 \text{ or } -\tfrac{1}{3}$$

我們知道，在 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{3}$ 處，函數 $f(x)$ 會發生極值。

---

[2] $(x^n)'=nx^{n-1}$ 中，x^n 為原函數，nx^{n-1} 為 x^n 的導函數。事實上，$(x^n)'=nx^{n-1}$，對於整數 $n\geq 0$ 皆成立。



根據上方圖形，我們看出在 $x=1$ 處發生了極小值，在 $x=-\frac{1}{3}$ 處發生了極大值，但是在數學上我們還有待決定，在 $x=1$ 處，其所對應的 c_2 會是正或是負，在 $x=-\frac{1}{3}$ 處，其所對應的 c_2 會是正或是負，這是我們之後仍需探討的，我們才能夠知道它是極大還是極小值。不過原則上，我們已經看到了微分如何系統化地處理所有 n 次多項式函數，並判斷在哪些地方可能發生極大或極小值，而這一整套技術，就是我們在微分學裡面學到的第一組工具。