

泰勒多項式

單維彰・2012 年 10 月

我們通常把多項式寫成 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 這種形式，稱為多項式的**標準形式**，又因為 x 的次方從大排到小，所以又稱為**降幂排列**的標準形式。例如 $P = x^2 + 2x - 1$ 和 $Q = x^3 + x^2 + x + 1$ 都是標準形式。

任取一個實數 a ，寫成 $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$ 這種形式的多項式，稱為**泰勒形式**，又稱為**泰勒多項式**。每一個多項式都可以改寫成（相等的）泰勒形式，例如

$$P = 2 + 4(x-1) + (x-1)^2, \text{ 而且 } Q = 4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3。$$

我們不妨驗算 P ：

$$\begin{aligned} & 2 + 4(x-1) + (x-1)^2 \\ &= 2 + (4x-4) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= x^2 + (4x-2x) + (2-4+1) \\ &= x^2 + 2x - 1 = P \end{aligned}$$

寫在 $x-a$ 之中的 a 稱為泰勒多項式的**參考點**。以上兩個例子，都用了 1 當作參考點。參考點可以是任意實數，例如以下是 P 用 -1 或 1/2 當參考點的泰勒多項式：

$$P = -2 + (x+1)^2 = \frac{1}{4} + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

事實上，標準形式的多項式，可以視為以 0 為參考點的泰勒多項式。

我們特別要提醒讀者，當我們寫泰勒多項式的時候，習慣將 x 的次方從小排到大，稱為**升幂排列**。

怎樣將多項式從標準形式轉換到泰勒形式呢？我們先複習除法原理。小學時候解讀 $17 \div 3 = 5 \dots 2$ 的方式之一是：若有 17 顆糖要分給 3 位小朋友，每人可得幾顆？剩下幾顆？反過來，如果不知糖有幾顆，但是知道 3 位小朋友每人拿 5 顆之後還剩 2 顆，就能算出原有幾顆糖： $5 \times 3 + 2 = 17$ 。這就是所謂的**除法原理**。用符號寫出來：

$$P \div S = Q \dots r \quad \longleftrightarrow \quad P = Q \times S + r$$

例如 $(x^4 + 1) \div (x+1) = x^3 - x^2 + x - 1 \dots 2$ 用除法原理寫出來，就是

$$x^4 + 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x+1) + 2。$$

我們不妨用直式乘法驗算：

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 + x - 1 \\
 \times \quad \quad \quad x + 1 \\
 \hline
 x^3 - x^2 + x - 1 \\
 x^4 - x^3 + x^2 - x \\
 \hline
 x^4 + 0 + 0 + 0 - 1
 \end{array}$$

所以 $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$ ，再加 2 就是 $x^4 + 1$ 。

從除法原理可以推論餘式定理，對稍後學習泰勒形式很有幫助。現在我們用函數形式 $f(x)$ 表示多項式，如果 $f(x) \div (x - a) = Q \dots r$ ，根據除法原理

$$f(x) = Q \cdot (x - a) + r。$$

然後在等號兩側都代入 $x = a$ ，則得到

$$f(a) = Q \cdot (a - a) + r = Q \cdot 0 + r = r。$$

因此 $f(x) \div (x - a)$ 的餘數必定是 $r = f(a)$ 。這就稱為**餘式定理**。

舉一個例子：做 $f(x) = x^2$ 以 1 為參考點的泰勒多項式，用綜合除法做 $x^2 \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

q(x)

得到商 $q(x) = x + 1$ ，餘 $r = f(1) = 1$ 。也就是

$$f(x) = q(x) \cdot (x - 1) + 1$$

對 $q(x)$ 再做一次 $q(x) \div (x - 1)$ 的除法

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & 1 & 0 \\
 & & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 \\
 & & 1 \\
 \hline
 & 1 & 2
 \end{array}$$

q(1)

得到 $q(x) \div (x-1) = 1 \dots 2$ 也就是 $q(x) = 1 \cdot (x-1) + 2$ 。代入 $f(x) = q(x) \cdot (x-1) + 1$ 就得到

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x) \cdot (x-1) + 1 \\ &= [(x-1) + 2] \cdot (x-1) + 1 \\ &= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \\ &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \end{aligned}$$

注意最後一步只是將降冪改寫成升冪而已。

從以上的例子，我們看到一個策略：如果要將多項式函數

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

改寫成以 a 為參考點的泰勒多項式

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$$

可以連續地除以 $x-a$ 。第一次相除得到的餘數就是 c_0 ：

$$f(x) \div (x-a) = q_1(x) \dots c_0$$

將得到的商再除以 $x-a$ ，所得的餘數就是 c_1 ：

$$q_1(x) \div (x-a) = q_2(x) \dots c_1$$

依此類推，每一次得到的餘數，依序就是升冪排列之泰勒多項式的係數。其中 $q_1(x)$ 是 $n-1$ 次多項式函數， q_2 是 $n-2$ 次多項式函數，一直做到 $q_n(x)$ 是常數函數為止，而 $q_n(x) = c_n$ 。

以前面的 $P = x^2 + 2x - 1$ 及 $a = 1$ 為例， $P = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2$ 的係數 c_0 ， c_1 ， c_2 可以依序從以下的除法得到：

$$P \div (x-1) = (x+3) \dots 2$$

故 $c_0 = 2$ 。而

$$(x+3) \div (x-1) = 1 \cdot (x-1) \dots 4$$

故 $c_1 = 4$ ，而最後一個除式的商是 1，它就是 c_2 。故

$$P = 2 + 4(x-1) + (x-1)^2$$

再以 $Q = x^3 + x^2 + x + 1$ 及 $a = 1$ 為例， $Q = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3$ 的係數 c_0 ， c_1 ， c_2 ， c_3 可以依序從以下的除法得到：

$$Q \div (x-1) = (x^2 + 2x + 3) \dots 4$$

故 $c_0 = 4$ ；再做

$$(x^2 + 2x + 3) \div (x-1) = (x+3) \dots 6$$

故 $c_1 = 6$ ；再做

$$(x+3) \div (x-1) = 1 \cdot (x-1) \dots 4$$

故 $c_2 = 4$ 。最後一個常數的商就是 c_3 ，亦即 $c_3 = 1$ 。故

$$Q = 4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$$

從以上兩組例子，我們應該可以歸納出來：一共做 n 次除法，而且泰勒多項式的 $c_0 = f(a)$ 和 $c_n = a_n$ 。也就是

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n \\ &= f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n \end{aligned}$$