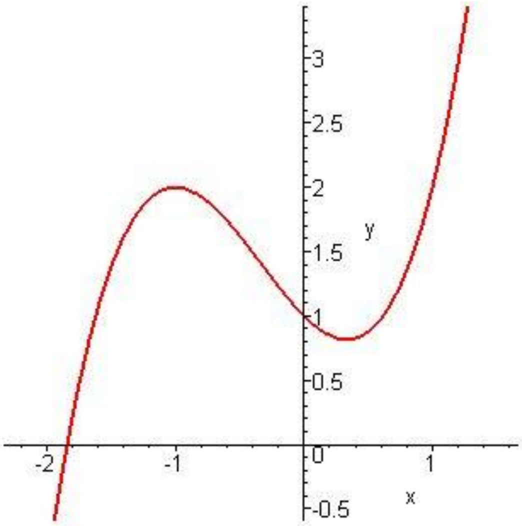
多項式函數的局部圖形像直線

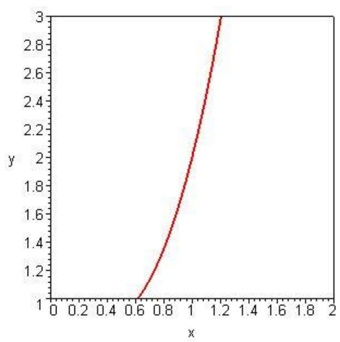
單維彰・2012 年 10 月

既然我們可以用泰勒形式的前幾項，例如 $f(x)\approx c_0+c_1(x-a)$，來估計 f 在 a 附近的函數值，那麼，因為函數圖形就是 x 和 $f(x)$ 在平面上對應的點聚集而成的，所以 f 在 a 附近的函數圖形其實也就應該與 $y=c_0+c_1(x-a)$ 的圖形差不多。而我們知道後者是一條直線：它的斜率是 c_1 而通過點 (a,c_0)，也就是通過點 $(a,f(a))$。

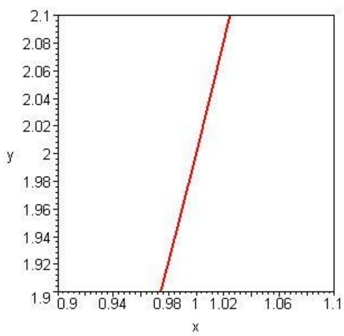
例如 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 的函數圖形大致如下，我們看到它是一條「曲」線。



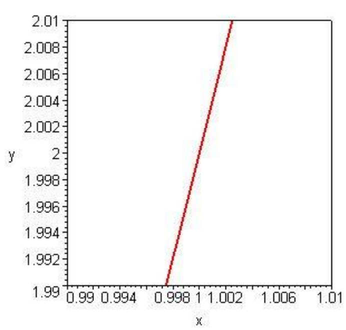
可是，如果我們看它在 $x=1$ 附近的函數圖形，會怎樣呢？首先，它會通過點 $(1,f(1))$ 也就是 $(1,2)$。在本節中，我們將採以下方法來 zoom-in 函數圖形：選一個參考點 a 和一個正數 h，我們在 $a-h\le x\le a+h$ 和 $f(a)-h\le y\le f(a)+h$ 的正方形範圍內繪製圖形。雖然繪圖範圍是一個以 $(a,f(a))$ 為中心、以 $2h$ 為邊長的正方形，如果 h 很小則圖也應該很小；但是為了讓我們清楚地比較它們的變化，再把圖放大至視覺上一樣的大小。像這樣的圖，我們簡稱為「在 $x=a$ 附近以 $2h$ 為邊長的正方形區域圖」。例如，以下三幅圖，分別是 f 在 $x=1$ 附近，以 2、0.2 和 0.02 為邊長的正方形區域圖。



邊長為 2

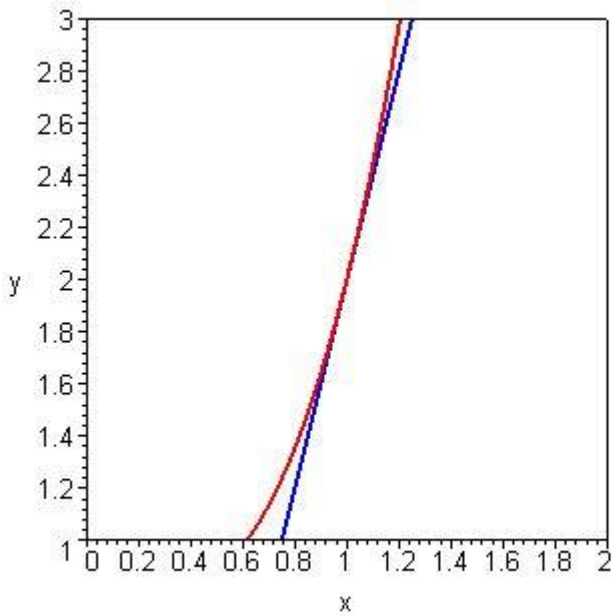


邊長為 0.2



邊長為 0.02

從圖形觀察，很明顯地看到函數圖形像一條直線。而因為 $f(x)$ 以 1 為參考點的泰勒形式為 $f(x)=2+4(x-1)+c_2(x-1)^2+\dots$，我們進一步知道這條直線差不多就是 $y=2+4(x-1)=4x-2$。在上述邊長為 0.2 和 0.02 的正方形區域內，函數「曲線」和直線已經看不出差別，所以下圖只顯示邊長為 2 的情況，其中紅色曲線是 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 的圖形，藍色直線是 $y=4x-2$ 的圖形。



類似地，我們再看三組例子。$f(x)$ 以 1/2、0、-1 為參考點的泰勒多項式依序為

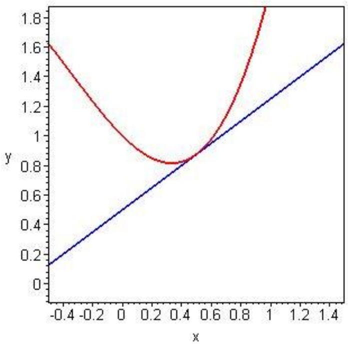
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{7}{8}+\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\dots \\
&= 1-x+\dots \\
&= 2+0\cdot(x+1)+\dots
\end{aligned}
$$

注意，以 -1 為參考點的時候，一次項係數是 0。因此，函數圖形在 $x=\frac{1}{2}$、$x=0$、$x=-1$ 附近分別差不多是以下直線：

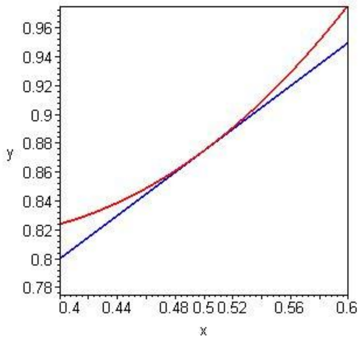
$$y_1=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\text{、}y_2=-x+1\text{、}y_3=2$$

我們將曲線和直線分別畫在以下三列圖裡，每一列都有三幅，依序是邊長為 2、0.2、0.02 的正方形區域圖。紅色是曲線，藍色是直線；當曲線和直線難以分辨的時候，我們就不畫直線了。

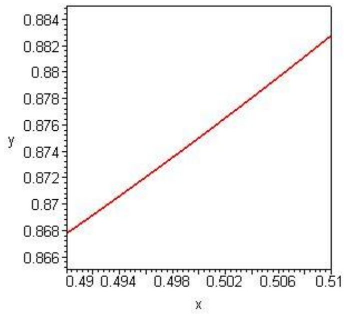
在 $x = 1/2$ 附近：



邊長為 2

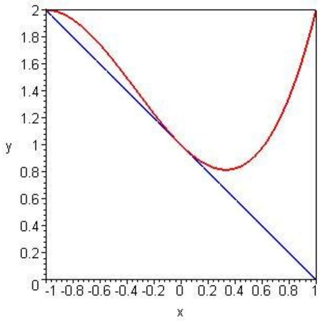


邊長為 0.2

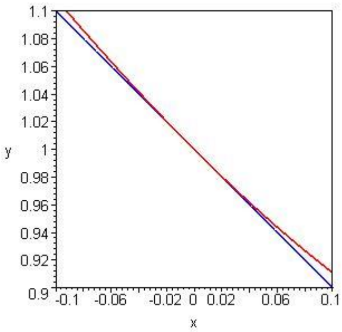


邊長為 0.02

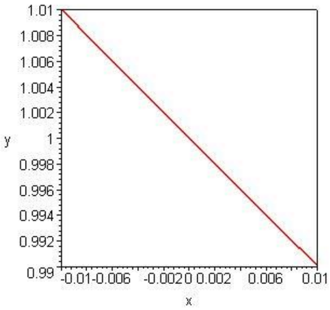
在 $x = 0$ 附近：



邊長為 2

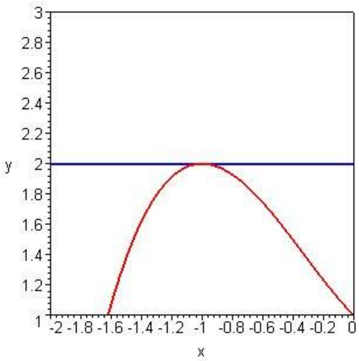


邊長為 0.2

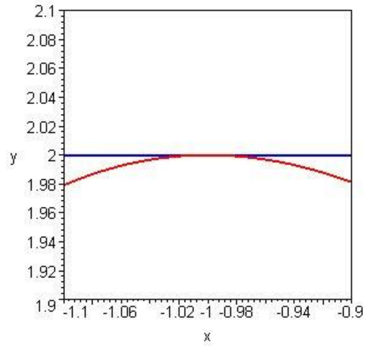


邊長為 0.02

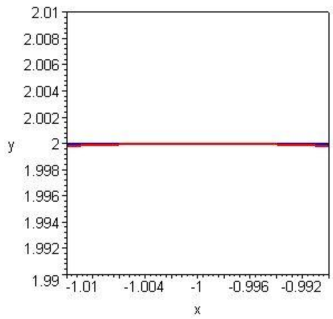
在 $x = -1$ 附近：



邊長為 2



邊長為 0.2



邊長為 0.02

觀察三系列的圖形，只要我們 zoom-in 得夠小，函數曲線都差不多是一條直線。只有在 $x = -1$ 附近，縮小到邊長為 0.02 時，曲線和直線還略可分辨；讀者應該相信，只要再縮小範圍一點，它們就會難以分辨了。