多項式函數的切線與導數

單維彰・2015 年 3 月

多項式函數 $f(x)$ 在任何一點 a 的附近，函數圖形像一條直線，那條直線的方程式就是 f 以 a 為參考點的泰勒多項式 $f(a)+m(x-a)+\cdots$ 的一次多項式部分：

$$y=m(x-a)+f(a)$$

我們稱之為 $f(x)$ 的函數圖形在 $x=a$ 處的**切線** (tangent line)。切線的斜率稱為 $f(x)$ 在 a 的**導數** (derivative)，記作 $f'(a)$。換句話說：

$$f(x) \text{ 在 } a \text{ 的切線方程式為 } \quad y=f'(a)\,(x-a)+f(a)$$

舉一個例子，令多項式函數 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$，f 以 0 為參考點的泰勒多項式為

$$1+2x-3x^2+x^3$$

所以 f 在 $x=0$ 處的切線方程式為

$$y=2x+1$$

而 f 在 0 的導數為 $f'(0)=2$。

同一個函數 $f(x)$ 在不同位置的切線和斜率 (也就是 $f'(a)$) 通常是不同的。例如同上的 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$，f 以 1 為參考點的泰勒多項式為

$$1-(x-1)+\cdots$$

所以 f 在 $x=1$ 處的切線方程式為

$$y=1-(x-1)=2-x$$

而 f 在 1 的導數為 $f'(1)=-1$。再者，f 以 2 為參考點的泰勒多項式為

$$1+2(x-2)+\cdots$$

所以 f 在 $x=2$ 的切線方程式為

$$y=1+2(x-2)=2x-3$$

而 $f'(2)=2$。

圓的切線一定在圓的外側，但多項式的切線就不一定在曲線的同一側了。切線可能完全在多項式函數圖形的下方，或完全在上方，或者「穿透」曲線，有時在曲線的上側、有時在下側。