

導數的係數積與加減

單維彰・2015 年 3 月

運用兩遍綜合除法，我們得到導數的**基本公式**：

當 $f(x) = x^n$ 時 $f'(a) = n a^{n-1}$ ，其中 $n=2, 3, 4, \dots$

注意，以上我們只討論了 $n \geq 2$ 的狀況。但是當 $n=1$ 時， $f(x) = x$ ，以 a 為參考點的泰勒形式必定是 $a + (x-a)$ ，所以 $f'(a) = 1$ ；而 na^{n-1} 的公式得到 $1 \cdot a^0 = 1$ ，所以公式對 $n=1$ 的情況也成立。

當 $n=0$ 時， $f(x) = 1$ ，以 a 為參考點的泰勒形式就是 $1 + 0 \cdot (x-a)$ ，所以 $f'(a) = 0$ ；而 na^{n-1} 的公式得到 $0 \cdot a^{-1} = 0$ ，所以公式對 $n=0$ 的情況也成立。這裡有一個 a 是否為 0 的細節問題，但是就公式的形式而言，我們就不予討論了。

整理之後，導數的**基本公式**可以改寫成：

當 $f(x) = x^n$ 時 $f'(a) = n a^{n-1}$ ，其中 $n=0, 1, 2, 3, \dots$

即使如此，基本公式的應用範圍還是很窄。現在我們發展計算導數的兩種性質，就能把基本公式應用到所有多項式函數了。

首先是導數的係數積性質。將 $f(x)$ 寫成以 a 為參考點的泰勒形式：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots$$

其中「 $\dots$ 」表示 $x-a$ 的高次項，我們暫時用不著；我們並沒有刪除它們，只是用不著而省略不寫而已。根據基本公式而得到

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + \dots$$

當 $f(x) = 3x^n$ ，只要將上式的等號兩側同乘以 3，就得到

$$3x^n = 3a^n + 3na^{n-1}(x-a) + \dots$$

可見 $f'(a) = 3na^{n-1}$ 。一般而言，如果 $f(x) = kx^n$ ，則

$$kx^n = ka^n + kna^{n-1}(x-a) + \dots$$

可見 $f'(a) = kna^{n-1}$ 。所以，這就是導數的**係數積法則**：

$$\text{若 } f(x) = kx^n, \text{ 則 } f'(a) = kna^{n-1}$$

設 m 、 n 為正整數，令 $f(x) = 3x^m - 2x^n$ ，則基本公式搭配係數積法則得到

$$3x^m = 3a^m + 3ma^{m-1}(x-a) + \cdots$$

$$2x^n = 2a^n + 2na^{n-1}(x-a) + \cdots$$

將兩式相減，同類項合併之後得到

$$3x^m - 2x^n = (3a^m - 2a^n) + [3ma^{m-1} - 2na^{n-1}](x-a) + \cdots$$

可見 $f'(a) = 3ma^{m-1} - 2na^{n-1}$ 。這就是導數的**加減**法則：

$$\text{若 } f(x) = x^m \pm x^n, \text{ 則 } f'(a) = ma^{m-1} \pm na^{n-1}$$

把係數積和加減法則合併在一起，我們得到一套計算多項式函數之導數的策略，就是把多項式的「項」拆開來，一項一項地處理，而每一項都用基本公式搭配係數積法則來處理：

$$\text{若 } f(x) = px^m \pm qx^n, \text{ 則 } f'(a) = p[ma^{m-1}] \pm q[na^{n-1}]$$

舉例而言，若對 $f(x) = x^3 + x - 1$ ，求 $f'(2)$ ，可以先將各項拆開：

$$f(x) = [x^3] + [x] - [1]$$

然後每一項作其導數：

$$f'(a) = [3a^2] + [1] - 0$$

代入 $a = 2$ 得到

$$f'(2) = [3 \cdot 2^2] + [1] - 0 = 13$$

我們不妨運用綜合除法驗證一遍：

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ 2 \quad 4 \quad 10 \\ 1 \quad 2 \quad 5 \quad 9 \\ 2 \quad 8 \\ 1 \quad 4 \quad 13 \end{array}$$

可見，的確 $f'(2) = 13$ 。

再做一個 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ 而求 $f'(-1)$ 的例子。拆開來逐項求導數：

$$f(x) = 4[x^3] - 2[x^2] + 5[x] - 7[1]$$

$$f'(a) = 4[3a^2] - 2[2a] + 5[1] - 7[0]$$

$$= 12a^2 - 4a + 5$$

所以 $f'(-1) = 12(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 21$ 。讀者應該用綜合除法驗證這個答案。