

微分與導函數

單維彰・2015 年 5 月

我們先學會的是**導數基本公式**

當 $f(x) = x^n$ 時 $f'(a) = n a^{n-1}$ ，其中 $n=0, 1, 2, 3, \dots$

然後運用導數的係數積與加減性質，求得對認識參考點 a 的導數公式 $f'(a)$ ，然後算出特定的導數。例如對於 $f(x) = x^3 + x - 1$ ，求 $f'(2)$ 的程序，是先導出公式

$$f'(a) = 3a^2 + 1$$

然後代入 $a = 2$ 得到 $f'(2) = 3(2)^2 + 1 = 13$ 。可是，一旦有了 $f'(a)$ 的公式，我們其實也可以計算

$$f'(3) = 3(3)^2 + 1 = 28，或者 f'(-\frac{1}{2}) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{7}{4}。$$

事實上，經過一些練習，我們應該已經認識到：

$f'(a) = 3a^2 + 1$ 是以 a 為變數的函數

既然它是個函數，我們並不怎麼習慣使用 a 當作變數，而習慣使用 x 當作變數。不妨把 a 都換成 x ，就改成了我們習慣的樣子：

$f'(x) = 3x^2 + 1$ 是以 x 為變數的函數

這個新的函數， $f'(x) = 3x^2 + 1$ 稱為 $f(x) = x^3 + x - 1$ **導函數** (derivative function)，因為它是從 $f(x)$ 「導」出來的函數。而**微分** (differentiate) 就是**求導函數**的動作或程序。因為導數就是導函數在特定點的函數值，所以求得了導函數，就等於求得了所有導數。因此，我們也說**微分**是「**求導數**」的動作或程序。讓我們暫且做個小結：

$f(x)$ 微分的結果稱為 $f(x)$ 的**導函數**，記作 $f'(x)$

所以，從此以後，求導數的程序就改變如下：例如求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處的導數，則程序為

- (1) 對 $f(x)$ 微分，求得導函數 $f'(x)$
- (2) 將 $x = 2$ 代入 $f'(x)$ 得到 $f'(2)$ ，此即 f 在 2 的導數（切線斜率）

微分的動作可以用 $[\cdot]'$ 來表示，這讓我們不必每次都指定函數的名字 $f(x)$ 或 $g(x)$ ，而可以直接對函數的式子微分。例如，以前的導數基本公式可以改寫成

微分基本公式

$$[x^n]' = nx^{n-1}, \text{ 其中 } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

而導數的係數積和加減性質，全部可以改寫成

微分的係數積與加減法則

$$[ax^m + bx^n]' = a[x^m]' + b[x^n]'$$

一個特例是：一次函數的微分即其斜率 $[mx + k]' = m$ ，因為

$$[mx + k]' = m[x]' + k[1]' = m \cdot 1 + k \cdot 0 = m$$

例如，令 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ ，求 $f'(-1)$ 的程序是
(1) 求導函數 $f'(x)$ ：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4[x^3]' - 2[x^2]' + [5x - 7]' \\ &= 4[3x^2] - 2[2x] + [5] \\ &= 12x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

(2) 代入 $x = -1$ 得到 $f'(-1) = 12(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 21$