

多項式函數的增減

單維彰・2015 年 5 月

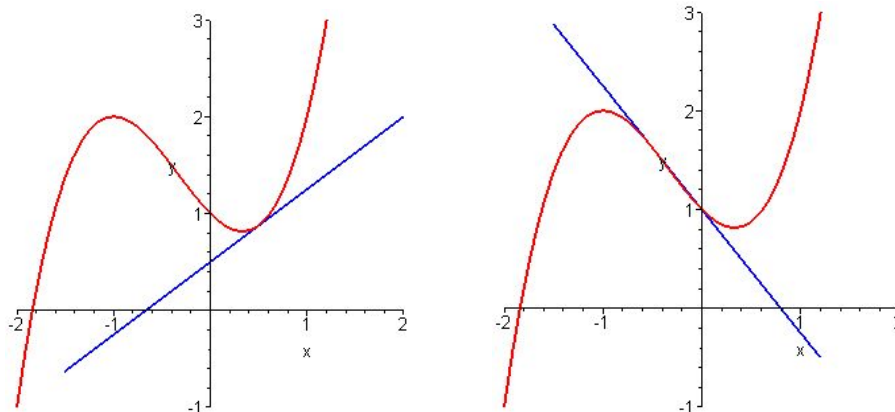
我們已經知道，多項式函數 $f(x)$ 的圖形，在任一點 $x=a$ 的「附近」就像它在 $x=a$ 處的切線： $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 。對於直線，我們又已經知道：

當 $f'(a)>0$ 時，切線斜向右上方；當 $f'(a)<0$ 時，切線斜向右下方；當 $|f'(a)|$ 越大，直線越陡。

所以可以推論以下關於函數的知識：

1. 當 $f'(a)>0$ 時，函數曲線在 $x=a$ 附近斜向右上方，函數**遞增**。
2. 當 $f'(a)<0$ 時，函數曲線在 $x=a$ 附近斜向右下方，函數**遞減**。
3. $|f'(a)|$ 越大，函數曲線在 $x=a$ 附近越陡，也就是遞增或遞減得越快。

以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 在 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的切線為例，因為 $f'(x)=3x^2+2x-1$ 且參照下圖。因為 $f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$ ，可見函數在 $x=\frac{1}{2}$ 附近遞增，而 $f'(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}<0$ ，



可見函數在 $x=-\frac{1}{2}$ 附近遞減。但是 $\left|f'(-\frac{1}{2})\right|>\left|f'(\frac{1}{2})\right|$ ，可觀察函數在 $-\frac{1}{2}$ 附近遞減得比它在 $\frac{1}{2}$ 附近遞增得快，而圖形在 $-\frac{1}{2}$ 附近也比 $\frac{1}{2}$ 附近陡。

一般而言，函數在 $[a, b]$ 區間內遞增或遞減的定義如下：

若對 $[a, b]$ 內任意兩數 x_1 與 x_2 ，

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內**遞增** (increasing)。若

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內**遞減** (decreasing)。

有些文件會定義以上的情況為**嚴格遞增** (strictly increasing) 和**嚴格遞減** (strictly decreasing)。讀者只要知道這種形容詞上的差異即可。而以上的閉區間 $[a, b]$ 可以改換成開區間 (a, b) ，或者無窮的區間 $[a, \infty)$ 、 $(-\infty, b]$ 、 $(-\infty, \infty)$ 等，不一而足，但遞增或遞減的意義都一樣，讀者必定能夠舉一反三，只要明辨區間的範圍即可。

注意函數的遞增或遞減性質，是其圖形的性質，與微分觀念並無關聯。但是，微分卻可以協助決定函數的遞增和遞減範圍。給定一個多項式函數 $f(x)$ ，如果求解導函數 $f'(x)$ 的不等式（得到解區間），則可以推論 $f(x)$ 的遞增和遞減範圍。

若在 (a, b) 區間內 $f'(x) > 0$ ，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內遞增。

若在 (a, b) 區間內 $f'(x) < 0$ ，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內遞減。

如果以上的解區間 (a, b) 換成 (a, ∞) ，則 $f(x)$ 的遞增或遞減範圍就要改成 $[a, \infty)$ ；如果以上的解區間 (a, b) 換成 $(-\infty, b)$ ，則 $f(x)$ 的遞增或遞減範圍就要改成 $(-\infty, b]$ ；而如果以上的解區間 (a, b) 換成 $(-\infty, \infty)$ ，則 $f(x)$ 的遞增或遞減範圍也是 $(-\infty, \infty)$ 。