

相對極值

單維彰・2015 年 5 月

已經知道導函數之不等式 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 的解區間，對應函數 $f(x)$ 的遞增範圍和遞減範圍。我們也知道 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 的解區間是被等式 $f'(x) = 0$ 的解「隔開」的。也就是說，如果 $x = a$ 是 $f'(x) = 0$ 的一個解，亦即 $f'(a) = 0$ ，則 $f'(x)$ 在 a 的左邊「附近」和右邊「附近」就「可能」發生 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 的變化。因為 $x = a$ 的左右兩側可能發生 $f(x)$ 遞增轉為遞減，或遞減轉為遞增的現象，所以稱之為**臨界點**。

臨界點

若 $f'(a) = 0$ ， a 稱為 $f(x)$ 的一個**臨界點** (critical point)。

如果 a 是 $f(x)$ 的臨界點，而且 $f'(x)$ 在 a 的兩側變號，則 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 的左右兩側發生遞增轉遞減，或者遞減轉遞增的「轉折」。沿著從左到右的方向來看，如果從遞增轉遞減，則在 $x = a$ 有一個像山峰的轉折： $(a, f(a))$ 比附近的曲線高，它就像一個山頂；如果從遞減轉遞增，則在 $x = a$ 有一個像山谷的轉折： $(a, f(a))$ 比附近的曲線低，它就像一個谷底。

如果函數圖形在點 $(a, f(a))$ 達到山頂，我們說 $f(x)$ 在 $x = a$ 處發生**相對極大值** (relative maximum) 或**局部極大值** (local maximum)，簡稱**極大值**，而其極大值就是 $f(a)$ 。相對地，如果函數圖形在點 $(a, f(a))$ 達到谷底，我們說 $f(x)$ 在 $x = a$ 處發生**相對極小值** (relative minimum) 或**局部極小值** (local minimum)，簡稱**極小值**，而其極小值就是 $f(a)$ 。極大值和極小值，合稱為**極值**。

注意山頂和谷底，只是比「附近」的函數值大或是小，未必比「所有」函數值大或是小。回顧二次函數圖形的頂點，也是發生極大值或極小值的位置，但是二次函數圖形的最高點或最低點，就是二次函數的**最大值**或**最小值**。最大值又稱為**絕對極大值** (absolute maximum) 或**全域極大值** (global maximum)，最小值又稱為**絕對極小值** (absolute minimum) 或**全域極小值** (global minimum)。最大值和最小值，合稱為**絕對極值**。

注意，即使 $f'(a) = 0$ ， $f'(x)$ 在 a 的左右也不一定會變號 (a 可能是 $f'(x) = 0$ 的重根)。所以，即使 a 是臨界點， $f(x)$ 也不一定在 a 發生極值。最簡單的例子是 $f(x) = x^3$ ，雖然 $x = 0$ 是臨界點，但 $f(x)$ 的圖形在原點並沒有山峰或山谷的現象， $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 並沒有發生極值。

學到這裡，我們可以做個小結論：

1. 一次函數 $f(x) = mx + k$ 沒有極值。
2. 二次函數必有一個極值，而且是絕對極值。
3. 三次或更高次的函數，未必有極值；如果有，必然發生在臨界點。