當泰勒一次項消失時

單維彰・2012 年 10 月

如果多項式函數 $f(x)$ 的次數超過 1，而且它以 a 為參考點的泰勒形式之 $c_1=0$ 時， $f(x)=c_0+c_2(x-a)^2+\ldots$，我們可以進一步了解：函數圖形在 $x=a$ 附近應該像二次函數（代入 $c_0=f(a)$ ）

$$y=c_2(x-a)^2+f(a) \text{。}$$

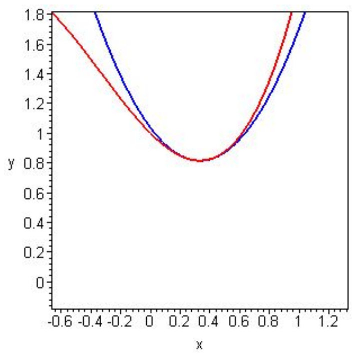
而它不就是我們熟悉的「配方後」的二次函數嗎？它是一條以 $(a,\ f(a))$ 為頂點的拋物線，而其頂點就是 y 發生最大值或最小值的地方。因此，函數 f 雖然可能沒有最大或最小值，但是至少在 $x=a$ 附近，它的圖形像一個開口向下或向上的拋物線，而 $(a,\ f(a))$ 就是在 $x=a$ 附近的一個最高或最低點了。這就是 f 發生相對極值的位置。

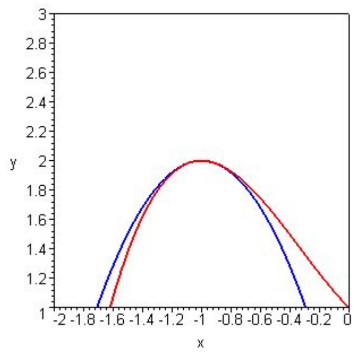
以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 為例，假如我們已知它以 $a=1/3$ 和 $a=-1$ 為參考點的泰勒形式如下（注意一次項係數皆為 0）：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{22}{27}+2(x-\frac{1}{3})^2+\ldots \\ &= 2-2(x+1)^2+\ldots \end{aligned}$$

以 2 為邊長的區域圖如下，其中紅色是 $f(x)$ 的圖形，藍色分別是二次函數

$$y_1=2(x-\frac{1}{3})^2+\frac{22}{27} \text{ 、 } y_2=-2(x+1)^2+2$$





在 $x=1/3$ 附近　　　　　在 $x=-1$ 附近

觀察以上圖形，並根據泰勒多項式在 $x=a$ 附近的估計能力，我們認識到：如果多項式函數 $f(x)$ 以 a 為參考點的泰勒形式為

$$f(x)=f(a)+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$$

則

- 如果 $c_1 = 0$ 而且 $c_2 > 0$，則 f 的圖形在 $x = a$ 附近有如一條以 $(a, f(a))$ 為頂點、開口向上的拋物線，f 在 $x = a$ 發生**相對極小值**，簡稱**極小值**，其值為 $f(a)$。
- 如果 $c_1 = 0$ 而且 $c_2 < 0$，則 f 的圖形在 $x = a$ 附近有如一條以 $(a, f(a))$ 為頂點、開口向下的拋物線，f 在 $x = a$ 發生**相對極大值**，簡稱**極大值**，其值為 $f(a)$。

以上的發現，讓我們認識了發生極值的特徵：如果多項式函數 $f(x)$ 以 a 為參考點的泰勒一次係數消失了，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處就有可能發生極大值或極小值。問題是，我們怎麼知道哪個參考點 a 的泰勒一次係數會消失呢？這就是導函數發揮作用的地方之一了。我們須要求 $f'(x) = 0$ 的解。