

求多項式極值的一般性方法

單維彰・2014 年 5 月

我們已經知道，多項式函數的極大值或極小值都發生在臨界點。為了找到這些可能的位置，我們要求 $f'(x)=0$ 的根。

舉一個三次函數為例：

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 143x^2 + 26900x$$

我們想要求 $f(x)$ 的極大值。所以，先算 $f'(x)=0$ 的根；求解

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - 286x + 26900 = 0$$

得到兩個臨界點 $x_{1,2} = \frac{715 \pm 5\sqrt{4309}}{3}$ 。因為 $f'(x)$ 的圖形是開口朝上的拋物線，很明顯 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 的解區間為

$$\begin{array}{ccccccc} f'(x) & & + & | & - & | & + \\ x & & & & x_1 & & x_2 \end{array}$$

所以 $f'(x)$ 在 $x_1 = \frac{715 - 5\sqrt{4309}}{3}$ 的左右由正轉為負，而 $f(x)$ 由遞增轉為遞減，故發生極大值。所以，當 $x_1 = \frac{715 - 5\sqrt{4309}}{3}$ 時， $f(x)$ 發生極大值，而其極值為 $f(x_1) \approx 1,519,775$ 。

一般而言，求得多項式函數 $f(x)$ 的極大值或極小值的一般性方法如下。

第一步：求解 $f'(x)=0$ 的所有實根，這些根稱為 f 的臨界點。

第二步：決定 $f'(x)$ 在所有臨界點之間的正負號。

第三步：若 $f'(x)$ 在臨界點 a 之左右（從左到右）由正轉負，則 $f(x)$ 在 a 發生極大值；若 $f'(x)$ 在臨界點 a 之左右由負轉正，則 $f(x)$ 在 a 發生極小值。

注意，若 $f'(x)$ 在臨界點 a 之左右同號，則沒有發生極值，而 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線為水平線。觀察 $f(x) = x^3$ 在原點附近的圖形，就是最簡單的發生臨界點卻非極值的狀況。