

多項式極值的應用示範

單維彰・2015 年 4 月

例題一

將一根直徑為 45 公分圓柱型的原木裁切成剖面為長方形的木樑，設其寬為 x ，高為 y ，而且 $x < y$ 。根據力學定律，木樑在其縱面上可承受的質量（公斤），正比於 xy^2 。若已知這種木材的比例常數為 $1/17.3$ ，求裁切的寬與高，使得木樑能承受最大質量；此時大約能承受幾公斤？

根據題意，要求 $W = kxy^2$ 的極大值，其中 $x^2 + y^2 = 45^2$ ，而 $k = \frac{1}{17.3}$ 。代入 $y^2 = 45^2 - x^2$ 之後， W 成為 x 的三次函數

$$W = 2025kx - kx^3$$

先求 W 的臨界點。 $W' = 2025k - 3kx^2$ ，從 $W' = 0$ 得到臨界點 $x_{1,2} = \pm 15\sqrt{3}$ ，負的寬度沒有意義，所以 $x_1 = 15\sqrt{3}$ 是唯一的臨界點。檢查 W' 在 x_1 左右的正負性為

$$\begin{array}{c} W' \\ x \end{array} \quad + \quad | \quad - \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \end{array}$$

所以 W 在 $x = x_1 = 15\sqrt{3} \approx 26$ （公分）而 $y = \sqrt{45^2 - x_1^2} = 3\sqrt{145} \approx 36$ （公分）時，承重達到最大值。此時可承受的重量為

$$W = \frac{1}{17.3} x_1 (45^2 - x_1^2) \approx \frac{1}{10\sqrt{3}} \cdot 15\sqrt{3} \cdot (6 \cdot 15^2) = 45^2 = 2025 \text{（公斤）}。$$

讀者不妨自行檢驗，以上極大值，其實也是 $x \geq 0$ 範圍內的最大值。

例題二

市調發現某休閒食品的售價定為 x 元時，全省門市每日約可售出 S 萬包，其中

$$S = \frac{1}{30}(x-15)^2 + 1, \quad 0 < x \leq 15。$$

按照此模型，該產品若定價為多少元時，能使每日營業額達到最大？預期的營業額大約為多少萬元？比目前多出多少元？

市調公司所採用的方法，並不是我們的重點。但是基本上他們採用「試賣會」或「限期優惠」的活動，嘗試幾種不同售價的銷售量，然後用「插值多項式」或「最小平方法」將市調的單價與銷售量，轉換成 $S = S(x)$ 之數學模型。以上例題，假設模型已經確立了，我們要求（日）營業額 R 在 $0 \leq x \leq 15$ 範圍內的最大值，其中

$$R = xS = \frac{1}{30}x^3 - x^2 + \frac{17}{2}x \quad (\text{萬元})$$

先求 R 的臨界點。 $R' = \frac{1}{10}x^2 - 2x + \frac{17}{2}$ ，從 $R' = 0$ 得到臨界點

$$x_{1,2} = 10 \mp \sqrt{15}。$$

檢查 R' 在臨界點左右的正負性為

$$\begin{array}{ccccccc} R' & & + & | & - & | & + \\ x & & & & x_1 & & x_2 \end{array}$$

可見 R 在 $x = x_1 = 10 - \sqrt{15} \approx 6\frac{1}{8}$ (元) 時達到極大，此時的營業額為

$$R = \frac{1}{30}x_1^3 - x_1^2 + \frac{17}{2}x_1 \approx 22.2 \quad (\text{萬元})$$

讀者不妨自行檢驗，以上極大值，其實也是 $0 \leq x \leq 15$ 範圍內的最大值。