# 導數的極限記號

**單維彰・2012 年 10 月**

過去，我們用連續的多項式除法，獲得了多項式函數以 $a$ 為參考點的泰勒形式，然後從泰勒一次項係數認識了「導數」，也就是函數圖形在 $x=a$ 處的切線斜率。我們可以說，微分方法為求導數的問題提供了「撇步」。本來，給定一個多項式函數 $f(x)$ 和一個參考點 $a$，我們就要做一次除法 $f(x)\div(x-a)=q(x)\ldots f(a)$ 並代入 $q(a)$，才能得到 $f'(a)$。每換一個參考點，就要重新做一次除法和一次代入，才能求到新的導數。但是，有了微分之後，我們可以輕鬆算出導函數 $f'(x)$，對每一個參考點，都只要代入就直接得到導數，不必一次一次重新做除法。

特別要提醒讀者，$f(x)\div(x-a)$ 的商並不是 $f'(x)$，商和 $f'(x)$ 只是恰好在 $x=a$ 的數值相等。例如當 $f(x)=x^2+3x-2$，

$f(x)\div(x-1)$ 的商是 $x+4$，代入 $x=1$ 得到 $f'(1)=5$，
$f(x)\div(x-2)$ 的商是 $x+5$，代入 $x=2$ 得到 $f'(2)=7$；

每次得到的 $q(x)$ 並不相同。但是導函數 $f'(x)=2x+3$ 只有一個，分別代入 $x=1$ 和 $x=2$ 得到 $f'(1)=5$ 和 $f'(2)=7$。

前面所說「做除法再代入」的程序，是求導數的原本作法，也就是微分的原本意義。由於這個程序在數學中相當常用，所以想用一組簡單的符號來表示。我們已經知道 $f(x)\div(x-a)=q(x)\ldots f(a)$ 可以根據除法原理寫成

$$f(x)-f(a)=q(x)\cdot(x-a)\text{。}$$

如果 $x\neq a$，則 $x-a\neq 0$，我們可以在左右兩式同除以 $x-a$ 得到

$$q(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \text{當}\quad x\neq a$$

以上等式的右邊，在 $x=a$ 沒有意義，因為右式將是 $\frac{0}{0}$。但是，我們明明知道 $q(x)$ 是一個多項式（$f(x)\div(x-a)$ 的商式），當然可以代入 $x=a$ 計算 $q(a)$ 而得到 $f'(a)$。可是數學的符號限制，卻讓我們不能在

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

的式子裡代入 $x=a$。這似乎是數學「自找」的麻煩。為了克服這個麻煩，數學家採用**極限**記號來表示以上動作：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

讀作「$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **當 $x$ 趨近於 $a$ 的極限**」。而它的意思就是

$$\text{計算}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{在}\,x=a\,\text{的值。}$$

對於多項式函數 $f(x)$ 而言，其實

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 就是做 $[f(x)-f(a)]\div(x-a)$ 的商 $q(x)$，然後算 $q(a)$。

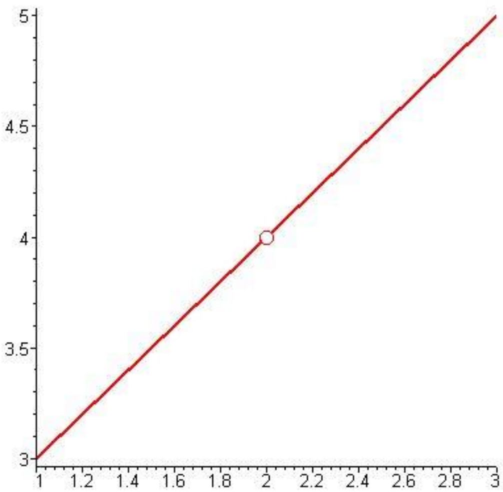
注意，根據因式定理，以上的除法必定整除。

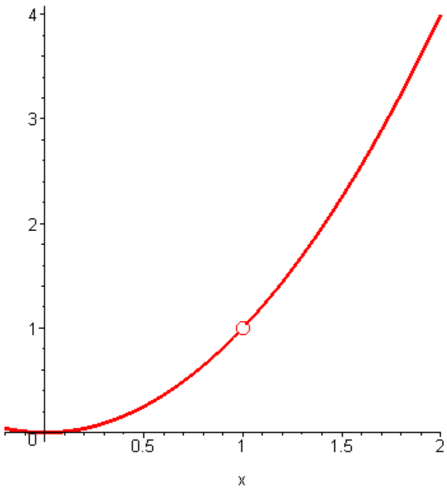
舉 $f(x)=x^2$ 而 $a=2$ 為例，則

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2\text{，其中}\,x\neq 2$$

可見分式 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ 的圖形，除了 $x=2$ 那一點以外，都與 $y=x+2$ 相同；如以下的左圖。$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 的意思就是要求圖裡那個空心點的值（它的 $y$ 坐標）。而實際的作法，就是將 $x=2$ 代入 $y=x+2$，得到 4，也就是

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$




再舉 $f(x)=x^3-x^2$ 與 $a=1$ 為例，則

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^3-x^2}{x-1}=x^2\text{，其中 } x\neq 1$$

可見分式$y=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$的圖形，除了$x=1$那一點以外，都與$y=x^2$相同；如以上的右圖。$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$的意思就是要求圖裡那個空心點的值（它的 $y$ 坐標）。而實際的作法，就是將$x=1$代入$y=x^2$，得到 1，也就是

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x-1}=1$$