多項式的極限運算

單維彰・2015 年 4 月

導數的觀念促使數學發展出**極限**的觀念，例如 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **當 x 趨近於 a 的極限**記作

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

而它的意思，對於多項式函數 $f(x)$ 而言，其實就是：

$$\text{做 } \left[f(x)-f(a)\right]\div(x-a) \text{ 的商 } q(x)\text{，然後算 } q(a)$$

根據因式定理，以上的除法必定整除。

做微積分推論的時候，難免遇到極限的運算。我們先練習牽涉多項式函數的極限運算。至於其他（諸如指數、對數、三角）函數的極限運算，將在學習微積分的過程中逐漸學到。

最基本的操作就是：

$$\text{當 } f(x) \text{ 是多項式函數，則 } \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

例如

$$\lim_{x\to 2} x^3-1=2^3-1=7,\quad \lim_{x\to -1} x^2+1=(-1)^2+1=2$$

兩個多項式的加、減、乘仍是多項式，所以適用以上原則。例如

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)(x^3-1)=(4+1)(8-1)=35$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2+x+1)^2+2x=(1-1+1)^2-2=-1$$

只有當多項式相除的時候，才發生「有趣」的現象。令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為多項式函數，則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

就要由分母 $g(a)$ 的表現來決定作法了。

1. 若 $g(a)\neq 0$，則 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$

   例如 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$。

2. 若 $g(a)=0$，則還要看 $f(a)$ 的值

A. 若 $g(a)=0$ 但 $f(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

例如 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0}$ 不存在。

B. 若 $g(a)=0$ 且 $f(a)=0$，則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公因式 $(x-a)$，可以將其約掉之後再做極限，也就是 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)}$

例如 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x-2=-1$。

如果約分一次之後，分子和分母都還是多項式，則依循 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的同樣原則繼續處理，例如 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$。