# 導數的極限定義

**單維彰・2013 年 2 月**

回顧多項式函數 $f(x)$ 在 $a$ 的導數 $f'(a)$ 就是 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 $x=a$ 的值。表面上不能直接將 $x=a$ 代入分式，會得到 $\dfrac{0}{0}$，但是事實上可以，因為當 $f(x)$ 是多項式的時候，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 一定會整除，得到一個商式 $q(x)$，代入 $a$ 即可求值。而我們用另一組符號來表示以上計算程序：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

讀作「當 $x$ 趨近於 $a$ 時，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的**極限**」。

當 $f(x)$ 不是多項式，就沒有所謂的整除了，那麼極限該怎麼算呢？很幸運地，有時候還是有辦法先「約分」，再代入 $a$ 來求值。例如當 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=2$，則上述極限問題就是

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

直接代入 $x=2$ 會得到無意義的 $\dfrac{0}{0}$。但是運用國中學過的「有理化分子」：

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

求極限的分式就變成了分式 $\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$ 可以代入 $x=2$ 得到 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$。

現在我們根據 $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 得到：

$$\sqrt{x}\text{ 在 }2\text{ 的導數是 }\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

可見，有時就算 $f(x)$ 不是多項式，還是有辦法用極限方式計算它的導數。

極限有它自己的數學、物理、經濟學意義，我們暫且不談。現在只要知道，

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 就是要想辦法約分 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，再代入 $x=a$ 求值。而且，我們也要用這種極限來定義一般函數的導數。

**導數的定義**

令 $f(x)$ 是一個函數，$a$ 在其定義域內，則若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在，它就是 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數，簡稱 $f$ 在 $a$ 的導數，記作 $f'(a)$。

求導數的過程，稱為**微分**。

前面定義裡所說的「存在」，簡單地說就是可以算得出一個答案的意思。以後再談「不存在」的情況，現在暫且不去管它。

舉例而言，根據以上陳述，$\sqrt{x}$ 在 4 的導數就是

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

而右式可以有理化為 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$，代入 $x=4$ 得到 $\dfrac{1}{4}$，所以 $\sqrt{x}$ 在 4 的導數就是 $\dfrac{1}{4}$，也就是說 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 處的切線方程式為 $y=\dfrac{1}{4}(x-4)+2=\dfrac{1}{4}x+1$。