

導函數的極限定義

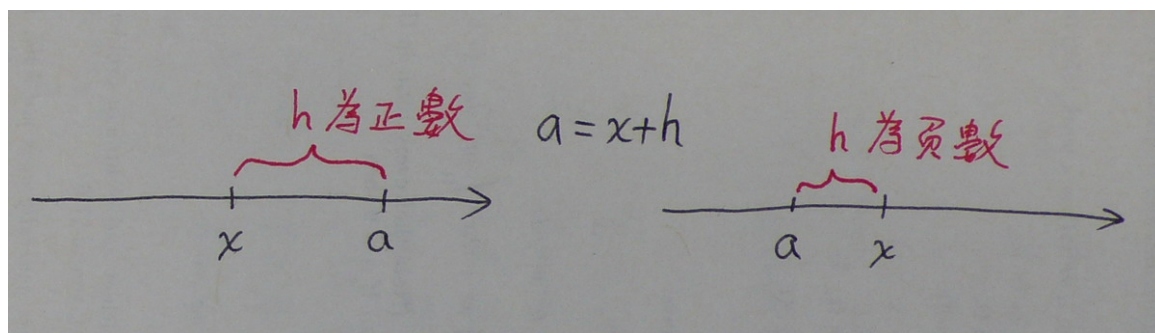
單維彰・2015 年 5 月

既然知道了導數可以用極限來定義，那麼導函數也可以如法炮製了。我們希望，一般函數的導函數，都可以寫成一個極限的定義式，就將會得到推廣的微分公式。如果套公式就能寫出導函數 $f'(x)$ ，則計算導數不過就是把 $x=a$ 代入 $f'(x)$ ，豈不更方便？

回顧 f 在 a 的導數定義

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

怎樣寫出導函數 $f'(x)$ 的極限定義式呢？第一個秘訣就是令 $x - a = h$ ，意即 x 跟 a 有一個差距為 h ， h 可為正或負數，如下圖。



因為 $h = \pm|x - a|$ ，所以當 x 越來越靠近 a ，就是 $|x - a|$ 越來越接近 0；因此 $x \rightarrow a$ 等同於 $h \rightarrow 0$ 。了解以後，剩下第二個秘訣就是簡單的代數運算：

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

別忘了 $f'(a)$ 本來就是一個以 a 為變數的函數，當初是因為習慣使用 x 當作變數符號，而將 a 改成 x 。現在重施故技，將

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad a \text{ 改成 } x \text{ 就是 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

於是我們獲得了導函數的極限定義，如下。

導函數的極限定義

令 $f(x)$ 是一個函數，則

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

就是 $f(x)$ 的**導函數**，記作 $f'(x)$ 或者 $[f(x)]'$ 。如果代入 $x=a$ 可以算出 $f'(a)$ ，它就是 f 在 a 的導數。求導函數的過程也稱作**微分**。

讓我們先以單項函數 $f(x) = x^n$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 示範極限定義的操作。根據定義：

$$[x^n]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

以上的分式不能直接代入 $h=0$ ，但是可以用二項式展開分子：

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= (x^n + nhx^{n-1} + C_2^n h^2 x^{n-2} + \dots + h^n) - x^n \\ &= nhx^{n-1} + C_2^n h^2 x^{n-2} + \dots + h^n\end{aligned}$$

與分母 h 約分之後，極限式就成了簡單的多項式函數極限（以 h 為變數）

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + C_2^n h x^{n-2} + \dots + h^{n-1} = nx^{n-1}$$

可見

$$[x^n]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

這就是我們已經知道的微分基本公式。我們把 $n=0$ 的情況留給讀者去驗證。

最後，我們再以 $f(x) = \sqrt{x}$ 為例，示範一次導函數極限定義的操作。首先，寫出導函數的極限定義式

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

然後運用有理化分子的伎倆，將分式轉換成可以代入 $h=0$ 的式子：

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{(x+h) - (x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

代入 $h=0$ 的得到 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，因此 $\sqrt{x}$ 的導函數就是

$$[\sqrt{x}]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

可見導函數的極限定義，可以將微分的基本公式，推廣到多項式以外的函數。這是我們將來要逐步學習的目標。