

## 推廣的微分基本公式

單維彰・2013 年 2 月

我們已經知道微分基本公式：

$$[x^n]' = nx^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

也就是當自變數  $x$  的次方是正整數或 0 時，有一套公式可用。但是前一節知道了

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

根據一般的指數率，我們曉得  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ，如果令  $n = \frac{1}{2}$  而代入上述基本公式，恰巧也成立：

$$[\sqrt{x}]' = [x^{1/2}]' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

這個「美麗的巧合」其實一般而言都是正確的。讓我們利用導函數的極限定義，再做一個例子，求  $\frac{1}{x}$  的導函數。

首先， $\left[\frac{1}{x}\right]'$  的極限定義式是

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

先做分子的通分：

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} = \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

再根據繁分式化簡的一般性原則：

$$\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}} = A/C \div B/D = A/C \times D/B = \frac{AD}{BC}$$

亦即『內項相乘為分母，外項相乘為分子』的口訣，化簡為可以代入  $h = 0$  的式子：

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

代入  $h = 0$  得到  $-\frac{1}{x^2}$ ，也就是說

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}$$

讀者不妨按照以上手法，試寫出 $\frac{1}{x^2}$ 的導函數之極限定義式。用繁分式化簡的方法，推導 $\left[\frac{1}{x^2}\right]' = -\frac{2}{x^3}$ 。

因為 $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ， $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ，根據以上所得，我們又驗證了基本公式其實代入 $n = -1$ 和 $n = -2$ 也都成立：

$$[x^{-1}]' = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$[x^{-2}]' = (-2) \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

雖然我們並沒有一一證明對所有的負數、分數、乃至於無理數指數 $r$ ， $x^r$ 的導函數都是 $r x^{r-1}$ ，但以上三組範例，應該已經足夠讓我們印象深刻地相信了。

### 推廣的微分基本公式

令 $r$ 為任意實數，則

$$[x^r]' = r x^{r-1}$$

以上還不是「所有的」微分公式，但是初步的微積分學到這裡就差不多了。理工醫農商管的專業學生，將來還要學習指數與對數函數的微分公式；財經和統計方面，有非常多的數學模型，和指數函數有關。而理工類的微積分，還會更深入發展三角函數的微分。