

代數函數之微分示範

單維彰・2012 年 10 月

推廣了微分基本公式之後，我們知道：

$$[x^r]' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$$

再搭配微分的線性性質，也就是係數積與加減法則，可以做多項式以外的很多函數的微分了；多項式函數只能有變數的正整數次方，現在可以推廣到變數的任意次方了，且稱這一類函數為代數函數。

例一，求

$$f(x) = 0.01x + 12 + \frac{2400}{x}$$

的導函數：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.01[x]' + 12 \cdot [1]' + 2400[x^{-1}]' \\ &= 0.01 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 2400[-x^{-2}] \\ &= 0.01 - \frac{2400}{x^2} \end{aligned}$$

所謂二階導函數，記作 $f''(x)$ ，就是導函數再微分的意思，也就是

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

例如前面那個函數 $f(x)$ 的二階導函數為

$$f''(x) = \left[0.01 - \frac{2400}{x^2}\right]' = -2400[x^{-2}]' = -2400[-2x^{-3}] = \frac{4800}{x^3}$$

例二，

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right]' &= [x^{1/2}]' - 3[x^{-1/2}]' = 2x^{-1/2} - 3 \cdot \left[-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

例三，

$$\begin{aligned} \left[x^2 - \frac{1}{x^2} + 4\sqrt{x}\right]' &= [x^2]' - [x^{-2}]' + 4[x^{1/2}]' \\ &= [2x] - [-2x^{-3}] + 4\left[\frac{1}{2}x^{-1/2}\right] \end{aligned}$$

$$= 2x + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

從這些例子可以看出來，一旦掌握了基本公式，微分其實是一個很「機械性」的程序，只要謹慎地按部就班地做，就沒錯了。所以，這種事情其實是可以經由程式設計，交給電腦代勞的。