

微分乘法律

單維彰・2013 年 2 月

回顧微分的加法性質，用簡單的符號記為

$$[u + v]' = u' + v'$$

其中 u 和 v 都可以代表任意的多項式函數。但是，乘法卻不像那樣： $[uv]' \neq u'v'$ 。舉例而言，若 u 和 v 都是單項一次式 x ，則 $uv = x^2$ ，所以 $[uv]' = 2x$ ，而 $u' = v' = 1$ ，所以 $u'v' = 1$ ，可見 $[uv]'$ 並不等於 $u'v'$ 。如果被微分的函數是兩個式子的乘積，例如 $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$ ，當然可以乘開為 $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ 之後，再計算

$$f'(x) = [2x^3 - 3x^2 + 2x - 3]' = 6x^2 - 6x + 2。$$

但是微分乘法律可以讓我們更簡單地計算微分。如果我們把 $f(x)$ 視為兩大項相乘，例如 $f(x) = uv$ ，其中 $u = x^2 + 1$ 、 $v = 2x - 3$ ，則 $f'(x) = [uv]'$ 。

微分乘法律

$[uv]' = u'v + uv'$ 。幫助記憶的口訣是「 u 微加 u 不微」。

在口訣中我們只唸著「 u 微」或「 u 不微」，但是心中要知道，當「 u 微」的時候 v 就不微，而當「 u 不微」的時候 v 就要微。

承以上例子，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)'(2x - 3) + (x^2 + 1)(2x - 3)' = 2x \cdot (2x - 3) + (x^2 + 1) \cdot 2 \\ &= (4x^2 - 6x) + (2x^2 + 2) = 6x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

答案當然和先乘開再微分的作法一樣，只是省了一些事。乘法律可以幫我們處理更複雜，而且不容易乘開的式子，例如 $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - 4x)$ ，其導函數為

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} + 1)'(x^2 - 4x) + (\sqrt{x} + 1)(x^2 - 4x)' \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2 - 4x) + (\sqrt{x} + 1)(2x - 4) \end{aligned}$$

我們不需要展開導函數，否則就失去使用乘法律的益處了。上述導函數已經能夠讓我們做導數，例如 f 在 1 的導數為

$$f'(1) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) = -4 - \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}。$$

如果想要展開以上結果，應該利用電腦。