微分乘法律的證明

單維彰・2015 年 7 月

回顧微分乘法律，用簡單的符號記為

$$[uv]' = u'\,v + u\,v'$$

其中 u 和 v 都可以代表任意的多項式函數。我們可以從泰勒形式看出微分乘法律的「理由」。令 $u = f(x)$ ， $v = g(x)$ ，它們以 a 為參考點的泰勒形式是

$$u = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots$$
$$v = g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots$$

其中 $\cdots$ 表示 $(x-a)^2$ 或者更高次項。將兩式相乘，就得到

$$uv = f(x)g(x) = \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots\right]\cdot\left[\mathrm{g}(a) + g'(a)(x-a) + \cdots\right]$$

$$= f(a)g(a) + \left[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right](x-a) + \cdots$$

因為 $(x-a)$ 的係數就是 uv 在 a 的導數，所以

$$[uv]'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

接著，我們就像以前一樣，把導數的變數名從 a 換回 x，就得到

$$[uv]'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

再用 $u = f(x)$ ， $v = g(x)$ 來簡化公式，就是微分乘法律：

$$[uv]' = u'\,v + u\,v'$$

從導函數的極限定義也可以推論微分乘法律。令 $u = f(x)$ ， $v = g(x)$ ，則

$$\begin{aligned}
[uv]' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right) + \lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

前面最後一條式子的第一項等於兩個極限的乘積：

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right)=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}g(x+h)\right)$$

等號右側第一個極限，就是 $f'(x)$ 的意思，而第二個極限，我們可以直接代入 $h=0$ 得到 $g(x)$，所以結果就是 $f'(x)\cdot g(x)$。而前面最後一條式子的第二項中，$f(x)$ 根本與極限的變數 h 無關，可以直接提出來：

$$=\lim_{h\to 0}\left(f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

而式中的極限就是 $g'(x)$ 的意思，所以結果就是 $f(x)\cdot g'(x)$。總括而言，前面的一系列計算可以繼續推導：

$$\begin{aligned}&=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\\&=u'v+uv'\end{aligned}$$

而這就是微分乘法律。

以上兩種推論的方式，目前都假設 u 和 v 是多項式函數或者簡單的冪函數（例如 $\sqrt{x}$ 或 x^{-1}），其實**微分乘法律**對於一般的「可微」函數都是正確的，只是沒有正式交代細節；對大多數同學而言，這樣的解釋應該足夠了。