

擴張的微分基本公式

單維彰 · 2015 年 5 月

我們先回顧微分的乘法性質，用它來介紹擴張的微分基本公式。微分的乘法性質是

$$[uv]' = u'v + uv'$$

我們已經知道 $[ax+b]' = a$ ，利用乘法公式推論

$$[(ax+b)^2]' = [(ax+b)(ax+b)]' = [ax+b]'(ax+b) + (ax+b)[ax+b]' = 2a(ax+b)，$$

利用以上等式再推論

$$[(ax+b)^3]' = [(ax+b)(ax+b)^2]' = [ax+b]'(ax+b)^2 + (ax+b)[(ax+b)^2]' = 3a(ax+b)^2$$

然後再推論

$$[(ax+b)^4]' = [(ax+b)(ax+b)^3]' = [ax+b]'(ax+b)^3 + (ax+b)[(ax+b)^3]' = 4a(ax+b)^3$$

依此類推，讀者不難歸納以下結論：

$$[(ax+b)^n]' = na(ax+b)^{n-1}，其中 n 為正整數$$

以上公式不討論 $n=0$ 的無聊情況，相信大家知道怎麼處理 $n=0$ 。讀者不妨使用「數學歸納法」來證明以上等式。

微分基本公式告訴我們，單項函數的微分是 $[x^n]' = n x^{n-1}$ ，而以上結論也就是說：令 $u = ax+b$ ，則 $[u^n]' = nu^{n-1} \cdot a$ ，注意此時 $u' = a$ ，所以也就是 $[u^n]' = nu^{n-1} \cdot u'$ 。事實上，把 u 換成任何 x 的多項式，把正整數 r 換成任意實數，以上公式也靈。這就是

擴張的基本公式

$$[u^r]' = ru^{r-1} \cdot u'$$

其中 $u = f(x)$ 是一個多項式函數， r 為任意實數