切線與一次估計

單維彰・2012 年 10 月

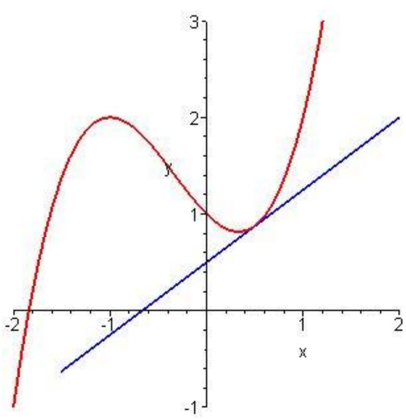
我們已經知道，當多項式函數 $f(x)$ 以 a 為參考點的泰勒形式是 $c_0+c_1(x-a)+\ldots$ 時，f 在點 $(a,f(a))$「附近」的函數圖形就像一條直線 $y=c_1(x-a)+c_0$。這條直線就稱為函數 $f(x)$ 通過點 $(a,f(a))$ 的**切線**，簡稱為 f 在 a 的切線。現在我們也已經知道 $c_0=f(a)$ 而 $c_1=f'(a)$，所以

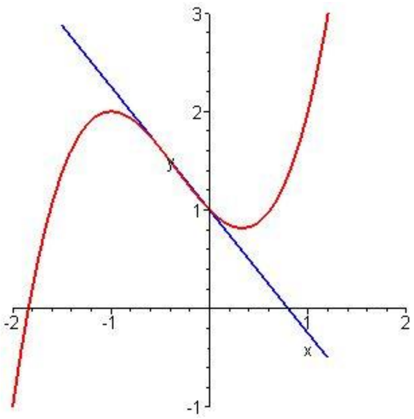
函數 $f(x)$ 在 a 的**切線方程式**為 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$。

以上直線方程式稱為「點斜式」，其中 $f'(a)$ 就是該直線的斜率。因此，我們知道了導數 $f'(a)$ 的另一層意義：

導數 $f'(a)$ 是函數 $f(x)$ 在 a 的**切線斜率**。

例如以下圖片內紅色曲線都是 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 的函數圖形，而藍色直線分別是它在 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的切線。





切線有什麼用？一般教材都會講一個計算上的應用和一個理論上的應用。其中計算上的應用就是「泰勒形式意在估計」的意思：如果 b 在 a 的「附近」，則用切線方程式在 $x=b$ 處的值來估計 $f(b)$ 真正的值。因為切線是一次方程式，所以這種估計的方法叫做**一次估計**。但是，使用電腦之後，這種估計變得沒有用。我們可以輕鬆地使用電腦計算 $f(b)$ 的估計值。

切線的理論應用就是函數在 $x=a$ 附近遞增或遞減的性質，我們已經知道以下事實。

1. 函數圖形在 $x=a$ 附近很接近切線，而且 $f'(a)$ 就是切線斜率
2. 當 $f'(a)>0$ 時，切線斜向右上方；當 $f'(a)<0$ 時，切線斜向右下方；當 $|f'(a)|$ 越大，直線越陡。

所以可以推論以下關於函數的知識。

1. 當 $f'(a)>0$ 時，函數曲線在 $x=a$ 附近斜向右上方，函數**遞增**。
2. 當 $f'(a)<0$ 時，函數曲線在 $x=a$ 附近斜向右下方，函數**遞減**。
3. $|f'(a)|$ 越大，函數曲線在 $x=a$ 附近越陡，也就是遞增或遞減得越快。

再以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 在 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的切線為例，參照前面的圖。因為 $f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$，可見函數在 $x=\frac{1}{2}$ 附近遞增，而 $f'(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}<0$，可見函數在 $x=-\frac{1}{2}$ 附近遞減。但是 $\left|f'(-\frac{1}{2})\right|>\left|f'(\frac{1}{2})\right|$，可觀察函數在 $-\frac{1}{2}$ 附近遞減得比它在 $\frac{1}{2}$ 附近遞增得快，而圖形在 $-\frac{1}{2}$ 附近也比 $\frac{1}{2}$ 附近陡。