用微分計算泰勒多項式

單維彰・2015 年 5 月

前面學習的擴張型基本公式，現在就要派上用場了！我們已經知道 $f(x)$ 可以寫成泰勒形式：

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\cdots$$

(1) 代入 $x=a$ ，我們可以發現 $c_0=f(a)$

(2) 將左右兩式微分，則可得到

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\cdots$$

代入 $x=a$ ，我們發現 $c_1=f'(a)$ 。

(3) 再將左右兩式微分，則可得到

$$f''(x)=2c_2+6c_3(x-a)+12c_4(x-a)^2+\cdots$$

代入 $x=a$ ，我們發現 $c_2=\dfrac{1}{2}f''(a)$ 。

(4) 繼續將左右兩式微分，則可得到

$$f'''(x)=6c_3+24c_4(x-a)+\cdots$$

代入 $x=a$ ，我們發現 $c_3=\dfrac{1}{6}f'''(a)$ 。

依此類推，讀者很容易觀察一條規律。因為基本公式的接續運作，使得以上係數的分母，有累積的效果：2 源自於 2×1，而 6 源自於 $3\times2\times1$。同學們也許已經可以猜想 $c_4=\dfrac{1}{24}f^{(4)}(a)$，而 24 源自於 $4\times3\times2\times1$。一般而言，令 n 為正整數，$1\times2\times3\times\ldots\times n$ 的累積稱為 ***n* 階乘**，記作 $n!$。所以 $2!=2$ ，$3!=6$ ，$4!=24$ 。為了符號系統的方便，數學家「規定」 $0!=1$。

綜合以上所述，我們得知：若函數 $f(x)$ 以 a 為參考點的泰勒多項式為

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots$$

則每一項的係數是

$$c_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

通常我們不須要做到很高次項，而前幾項就是

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3+\cdots$$

而如果 $f(x)=a_n x^n+\ldots=c_0+\ldots+c_n(x-a)^n$ ，因為等式兩側的 x^n 項各只有一個：

$a_n x^n$ 和 $c_n x^n$，可見泰勒形式的最高次項係數就是 $c_n=a_n$。這個特例不須要採用前述的公式來算；而且，套用 c_n 的微分公式，我們知道

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=a_n\text{。}$$

先前我們已經知道 $f^{(n)}(x)$ 將是 0 次多項式函數，亦即非零常數；現在我們更知道了

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot a_n\text{。}$$

因為 $f^{(n)}(x)$ 是一個常數，所以再次確認了 $f^{(n+1)}(x)=0$。

現在，我們總算徹底明白泰勒多項式的計算公式了。

其實，只要有公式，電腦就會算。Maxima 計算泰勒多項式的指令就是「泰勒」的英文名字 Taylor。其指令形式有四個參數，如下：

taylor(P, x, a, n)

其中 P 表示被轉換的函數式子，x 表示變數的名字，a 表示泰勒多項式的參考點，而 n 表示泰勒多項式的次數。例如

taylor(x^2, x, a, 2)

就是計算 $f(x)=x^2$ 以 $x=a$ 為參考點的二次泰勒多項式，得到結果

$a^2+2a(x-a)+(x-a)^2+\cdots$

符合我們所知的

$$c_0=f(a)=a^2\text{，}\quad c_1=f'(a)=2a\text{，}\quad c_2=a_2=1$$

但是我們知道其泰勒多項式就只是二次多項式，沒有其他項了，但是 Maxima 在此有點笨，它一律會在泰勒多項式後面寫…。你也可以把此處的 … 當作 0。但如果下指令

taylor(x^4, x, -1, 3)

就是計算 $f(x)=x^4$ 以 $x=-1$ 為參考點的三次泰勒多項式，得到結果

$1-4(x+1)+6(x+1)^2-4(x+1)^3+\cdots$

這裡的 $\ldots$ 就不是 0 了。我們現在可以反過來，從泰勒多項式的係數推論導數。例如，從以上 $(x+1)^2$ 的係數可以推論

$$\frac{1}{2}f''(-1)=6 \;\Rightarrow\; f''(-1)=12$$