微分連鎖律

單維彰・2013 年 2 月

微分連鎖律其實頗複雜，我們現在只講最基本的形式。將來，同學們會逐漸拓展連鎖律的應用形式。連鎖律是所有微分性質之中，威力最強大的一個。比方說，我們知道$\sqrt{x}$的微分公式，但遇到$\sqrt{x^2+1}$就還沒有辦法；我們也知道$\dfrac{1}{x}$的微分公式，但遇到$\dfrac{1}{2x+1}$就不知該怎麼辦了？本節只介紹連鎖律的最基本形式，但是最基本的一招，就能解決上述兩個問題了。

運用指數律，以下函數都可以寫成u^r形式：

$$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}\text{，}g(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}\text{，}h(x)=(x+1)^3$$

在 $f(x)$ 裡，$u=x+1$、$r=\dfrac{1}{2}$；在 $g(x)$ 裡，$u=x+1$、$r=-1$；在 $h(x)$ 裡，$u=x+1$、$r=3$；也就是

$$f(x)=u^{1/2}\text{，}g(x)=u^{-1}\text{，}h(x)=u^3\text{，其中 }u=x+1\text{。}$$

根據「擴張的基本公式」和「推廣的基本公式」，我們知道

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\text{，}g'(x)=-(x+1)^{-2}=-\frac{1}{(x+1)^2}\text{，}h'(x)=3(x+1)^2$$

在前面的三個例子裡面，$u'=[x+1]'=1$；所以，前面三個「擴張」又「推廣」的微分公式，其實都有一致的形式：

$$f'(x)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'\text{，}g'(x)=-u^{-2}\cdot u'\text{，}h'(x)=3u^2\cdot u'$$

到這裡，可以看出來以前所謂的「擴張的微分基本公式」，其實就是

微分連鎖律

$$\left[u^r\right]'=ru^{r-1}\cdot u'$$

當$u=x$，因為 $[x]'=1$，所以連鎖律其實就是微分基本公式：

$$\left[x^r\right]' = rx^{r-1}\cdot[x]' = rx^{r-1}$$

因此，微分連鎖律相當於「進一步推廣的微分基本公式」。

像$(3x+1)^3$這種函數，可以先展開成$27x^3+27x^2+9x+1$再微分得到

$[(3x+1)^3]' = 81x^2+54x+9$。但是運用連鎖律還是比較簡單（令$u=3x+1$）：

$$[(3x+1)^3]' = 3(3x+1)^2\cdot(3x+1)' = 9(3x+1)^2\text{，}$$

展開成$9\cdot(9x^2+6x+1)=81x^2+54x+9$之後，就看得出來兩種作法的結果一樣了。

但是像$f(x)=\sqrt{x^2+1}$和$g(x)=\dfrac{1}{2x+1}$這種函數，就沒辦法先展開，一定要用連鎖律來微分。

承上，運用連鎖律可得（令$u=x^2+1$）

$$\left[\sqrt{x^2+1}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\text{。}$$

同理，令$u=2x+1$

$$\left[\frac{1}{2x+1}\right]' = (-1)\cdot(2x+1)^{-2}\cdot(2x+1)' = -\frac{2}{(2x+1)^2}\text{。}$$

顯見連鎖律可以處理複雜函數的微分。

從此以後，建議同學們直接記憶「連鎖律形式」的微分基本公式：

$$\left[u^r\right]' = ru^{r-1}\cdot u'$$