微分連鎖律的證明

單維彰・2017 年 4 月

回顧**微分連鎖律**的簡單記法

$$\left[u^r\right]' = ru^{r-1}\cdot u'$$

以上符號的詳細意義是：$y=f(u)$ 而 $u=g(x)$，比方說 $y=u^2$ 而 $u=2x+1$，意思是自變數 x 先經過函數 g 映射到中介變數 u，然後 u 再經過函數 f 映射到應變數 y，如下圖所示：

$$x \xrightarrow{\quad g \quad} u \xrightarrow{\quad f \quad} y$$

所以 y 是經過 u 而與 x 發生關聯，用**合成函數**的方式寫出來就是

$$y=f(g(x))=(2x+1)^2$$

採用以上符號，連鎖律的意義便是：對任意數 a，

$$y=f(u)\text{ 在 }x=a\text{ 處的導數為 }f'(b)\cdot g'(a)\text{，其中 }b=g(a)$$

亦即當 $x=a$ 的時候 $u=b$，而 $f'(b)$ 是指 $y=f(u)$ 在 $u=b$ 處的導數。這裡要提醒一個符號上的細節：$f'(b)$ 是指 f 對 u 的導函數代入 $u=b$，而 $g'(a)$ 是指 g 對 x 的導函數代入 $x=a$。以前面的例子而言，$f'(b)=2b$，$g'(a)=2$，但是 $b=2a+1$，所以

$$y=f(g(x))=(2x+1)^2\text{ 在 }x=a\text{ 的導數為 }2b\cdot 2=4(2a+1)=8a+4$$

現在，我們利用前述的符號，以及「導數就是泰勒形式之一次項係數」的原理，來說明微分連鎖律。

令 $y=f(u)$ 而 $u=g(x)$，且 $b=g(a)$，則 $y=f(u)$ 以 b 為參考點的泰勒多項式為

$$f(u)=f(b)+f'(b)(u-b)+\cdots \tag{1}$$

其中 $\cdots$ 表示 $u-b$ 的平方項和更高次項。而 $u=g(x)$ 以 a 為參考點的泰勒多項式為

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\cdots \tag{2}$$

其中 $\cdots$ 表示 $x-a$ 的平方項和更高次項。現在觀察 (1) 式中的 $u-b$ 就是 $g(x)-g(a)$，而根據 (2) 式 $g(x)-g(a)=g'(a)(x-a)+\cdots$，所以 (1) 式就可以改寫成

$$f(u)=f(b)+f'(b)\left(g'(a)(x-a)+\cdots\right)+\cdots \tag{3}$$

式子裡的第二個$\cdots$表示$u-b$的平方項和更高次項，也就是$x-a$的平方項和更高次項；而第一個$\cdots$本來就表示$x-a$的平方項和更高次項，所以合併起來就是

$$f(u)=f(b)+\left[f'(b)\cdot g'(a)\right](x-a)+\cdots \tag{4}$$

其中$\cdots$表示$x-a$的平方項和更高次項。以上 (4) 式就是$y=f(u)$以$x=a$為參考點的泰勒多項式，它的一次項係數就是$y=f(g(x))$在$x=a$處的導數：

$$f'(b)\cdot g'(a)$$

故得證。

以上我們用導數形式來寫微分連鎖律，只要把任意數a視為導函數的變數，將它改寫成x，而$b=g(a)$就變成了$b=g(x)$，則b的角色其實就是原本的中介變數，所以把b改寫成原來的中介變數u，就把$f'(b)\cdot g'(a)$換成了$f'(u)\cdot g'(x)$。可是$u=g(x)$，所以$g'(x)$又可以簡記為u'。於是就得到了

微分連鎖律的導函數形式

$$\left[f(u)\right]'=f'(u)\cdot u'$$

在符號上要特別留意，$\left[f(u)\right]'$和u'都是對自變數x微分，但$f'(u)$是對中介變數u微分。應用連鎖律的時候，做完$f'(u)$之後，習慣代入$u=g(x)$使得導函數的自變數是x。

承前面的例子，

$$\left[(2x+1)^2\right]'$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[f(u)\right]' && \text{令 } f(u)=u^2 \text{，} u=2x+1 \\
&=f'(u)\cdot u' && \text{微分連鎖律} \\
&=[u^2]'\cdot[2x+1]' && \text{前者對 } u \text{ 微分，後者對 } x \text{ 微分} \\
&=[2u]\cdot[2] && \text{各自微分} \\
&=2(2x+1)\cdot 2 && \text{代回 } u=2x+1 \\
&=4(2x+1)=8x+4
\end{aligned}
$$