

微分的除法律

單維彰・2013年2月

微分除法律其實是乘法律及連鎖律的應用，只要同學能熟練運用乘法律與連鎖律，自然就會做分式的微分了。我們並不想特別強調除法律，但是，因為很多微積分課本都會獨立介紹除法律，我們也寫出來讓讀者知道。

微分除法律

$\left[\frac{v}{u}\right]' = \frac{v'u - vu'}{u^2}$ 。幫助記憶的口訣是『分母平方，分子微減分子不微』。

除法律可以用乘法律和連鎖律推導出來：

$$\begin{aligned}\left[\frac{v}{u}\right]' &= \left(v \cdot \frac{1}{u}\right)' \\ &= v' \cdot \frac{1}{u} + v \cdot \left[\frac{1}{u}\right]', \quad (\text{乘法律}) \\ &= v' \cdot \frac{1}{u} + v \cdot \left[-\frac{u'}{u^2}\right] \quad (\text{連鎖律}) \\ &= \frac{v'u - vu'}{u^2} \quad (\text{通分整理})\end{aligned}$$

例如 $\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right]'$ 可以用乘法律和連鎖律做：

$$\begin{aligned}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right]' &= [x+1]' \cdot (x^2+1)^{-1/2} + (x+1) \cdot \left[(x^2+1)^{-1/2}\right]' \\ &= (x^2+1)^{-1/2} + (x+1) \cdot \left[-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2} (2x)\right] \\ &= \frac{(x^2+1) - x(x+1)}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}} = (1-x)(x^2+1)^{-3/2}\end{aligned}$$

也可以使用除法律：

$$\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right]' = \frac{[x+1]' \cdot \sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot [\sqrt{x^2+1}]'}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right]}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2+1) - x(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}} = (1-x)(x^2+1)^{-3/2} \end{aligned}$$

當然，兩種作法的結果是一樣的。