

## 極限的逼近意涵

單維彰・2015年5月

用多項式除法，我們可以處理以下極限：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

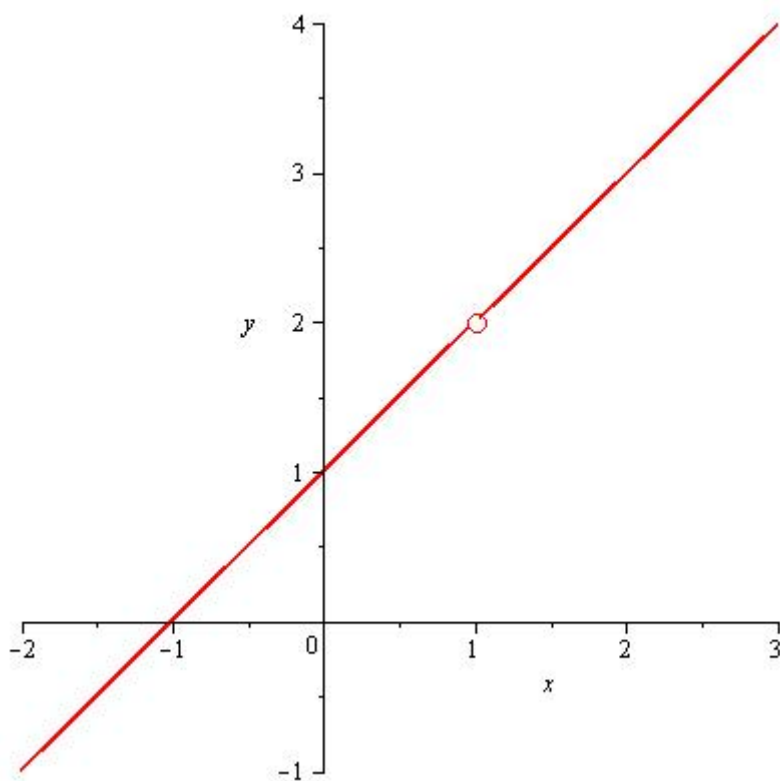
但將來會遇到沒有除法也沒有代數運算可做的狀況，例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

那種「真正的」極限，必須從「逼近」的意涵來理解。

函數  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  在  $x = 1$  處無定義，所以它的圖形將會缺了  $x = 1$  所對應的點。

它的圖形如下：



其實僅僅一個點的「缺口」當然沒那麼大，我們只是故意畫一個圓圈來凸顯它。而我們知道

$$\text{當 } x \neq 1 \text{ 時， } \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

所以當  $x \neq 1$  時， $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  的圖形就是直線  $y = x+1$ 。不論  $x$  從 1 的左邊越來越靠近 1：

0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.985, 0.986, ...

或者是從 1 的右邊越來越靠近 1：

1.3, 1.2, 1.1, 1.05, 1.04, 1.03, 1.02, 1.015, 1.014, ...

他所對應的  $y$  值，也就是  $y = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$  的值，就是

1.7, 1.8, 1.9, 1.95, 1.96, 1.97, 1.98, 1.985, 1.986, ...

或者

2.3, 2.2, 2.1, 2.05, 2.04, 2.03, 2.02, 2.015, 2.014, ...

可見  $\frac{x^2-1}{x-1}$  的值會隨著  $x$  越來越靠近 1 而變得越來越靠近 2。雖然當  $x \neq 1$  時， $\frac{x^2-1}{x-1}$  永遠不等於 2，但是它只能朝著 2 而去，沒有其他可能。這就是

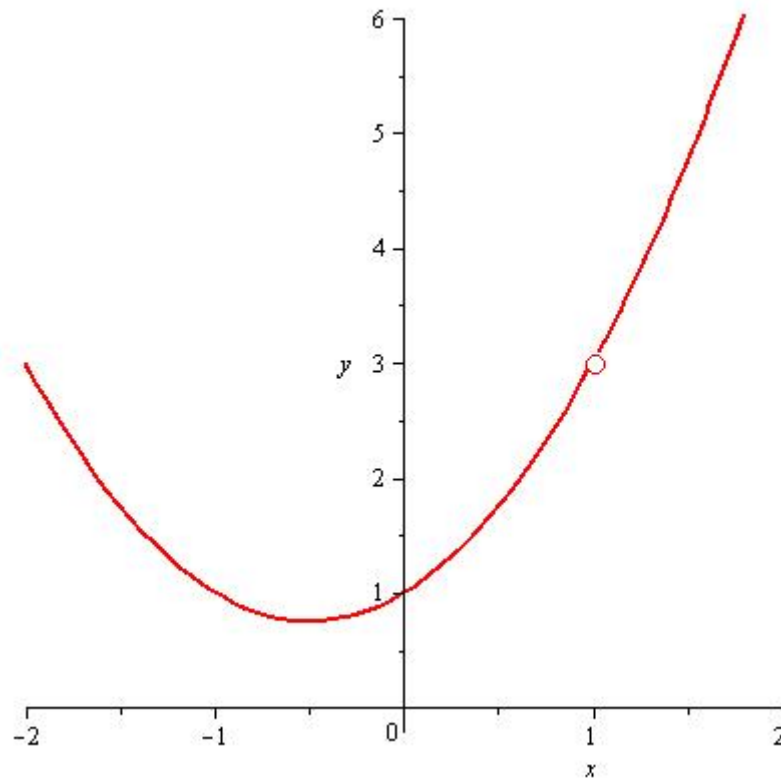
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

的逼近意涵。

再舉一個例子，

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

以下圖形是（誇大的） $y = \frac{x^3-1}{x-1}$  的函數圖形，它在  $x=1$  處無定義，所以畫了一個空心的圓圈。但是，當  $x \neq 1$  時， $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ ，所以圖中的曲線其實是  $y = x^2 + x + 1$  的圖形，去掉 (1, 3) 那一點。



不論  $x$  從 1 的左邊越來越靠近 1：

0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.985, 0.986, ...

或者是從 1 的右邊越來越靠近 1：

1.3, 1.2, 1.1, 1.05, 1.04, 1.03, 1.02, 1.015, 1.014, ...

他所對應的  $y$  值，也就是  $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$  的值，就是

2.19, 2.44, 2.71, 2.85, 2.88, 2.91, 2.94, 2.955, 2.958, ...

或者

3.99, 3.64, 3.31, 3.15, 3.12, 3.09, 3.06, 3.045, 3.042, ...

可見  $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$  的值會隨著  $x$  越來越靠近 1 而變得越來越靠近 3。雖然當  $x \neq 1$  時，

$\frac{x^3 - 1}{x - 1}$  永遠不等於 3，但是它只能朝著 3 而去，沒有其他可能。這就是

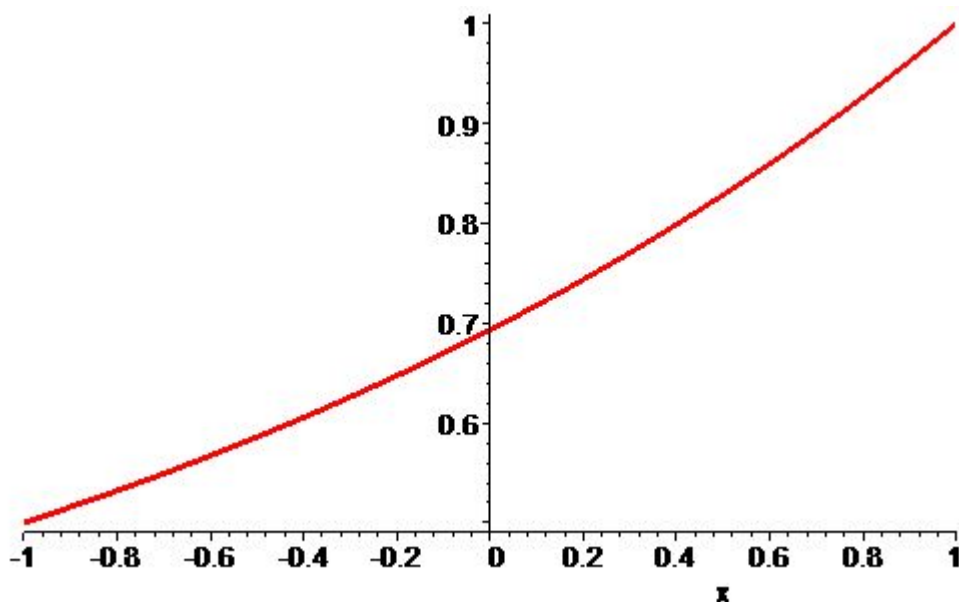
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

的逼近意涵。

回到非多項式分式的

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

問題，讓我們直接用電腦畫  $y = \frac{2^x - 1}{x}$  在  $x \in [-1, 1]$  範圍內的函數圖形：



函數  $y = \frac{2^x - 1}{x}$  在  $x = 0$  處無定義，所以它的圖形缺了  $x = 0$  所對應的值。這次我們不畫誇張的圓圈，但是大家一定看不出來「缺漏」的那一點。從圖上看，大家一定知道

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \approx 0.7 \text{ 而且略小於 } 0.7$$

讓我們觀察以下數值表

$x$	$y = \frac{2^x - 1}{x}$
0.10000	0.71773...
0.01000	0.69555...
0.00100	0.69338...
0.00010	0.69317...
$x \rightarrow 0$	<b>0.6931</b> .....
-0.00010	0.69312...
-0.00100	0.69290...
-0.01000	0.69075...
-0.10000	0.66967...

觀察當  $x$  從 0 的左邊和右邊越來越靠近 0 時， $y = \frac{2^x - 1}{x}$  的值分別從 0.6 和 0.7 越來越靠近一個定數。那個數顯然是 0.6931...。雖然我們不確定 ... 是哪些數，但是至少確定小數點之下的前四位是 6931。也就是說

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = 0.6931 \dots$$