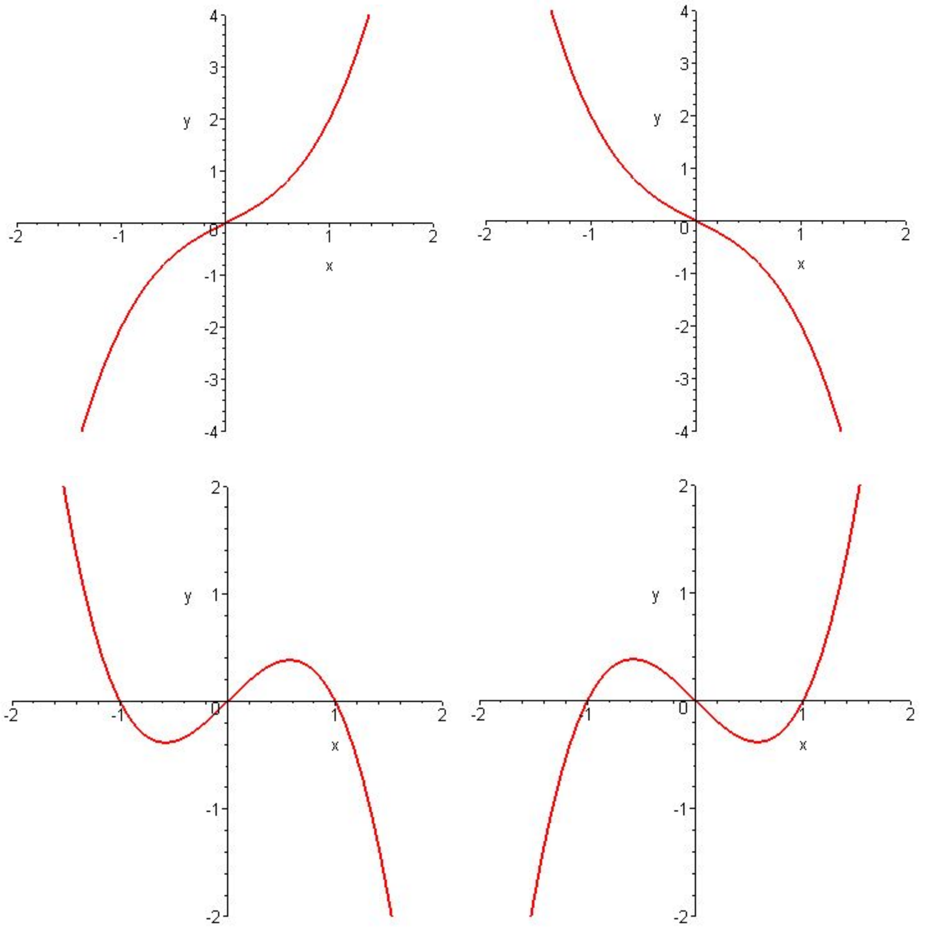
當泰勒二次項消失時：反曲點

單維彰・2012 年 10 月

我們已經知道三次函數 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的圖形必有一個(且僅有一個)對稱點 (h,k)，其中 $h=-\dfrac{a_2}{3a_3}$，$k=f(h)$。因為 $y=f(x)$ 的圖形在對稱點 (h,k) 的兩側**彎曲的方向相反**，所以它也稱為 $y=f(x)$ 的**反曲點** (point of inflection)。就像以下四幅圖形之中，原點就是反曲點。



三次函數一定有一個反曲點，更高次的函數則可能沒有、也可能有超過一個反曲點。要怎樣判斷高次函數是否出現反曲點呢？還是回到泰勒形式來瞭解。如果一個五次函數 $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 以 a 為參考點的泰勒多項式是

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_3(x-a)^3+\cdots，$$

亦即 $c_2=0$ 但是 $c_3\neq 0$，則函數 f 在 $x=a$ 附近的圖形就像三次函數

$y=c_3(x-a)^3+c_1(x-a)+c_0$ 的圖形。此三次函數的圖形對稱於 $(a,f(a))$ ，可見 $y=f(x)$ 的函數圖形在它兩側彎曲的方向相反。這時候，我們稱點 $(a,f(a))$ 是函數 $y=f(x)$ 的**反曲點**。

尋找一般函數 $f(x)$ 之反曲點的程序如下：

第一步：做 $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$ ，求解 $f''(x)=0$ 的實根。

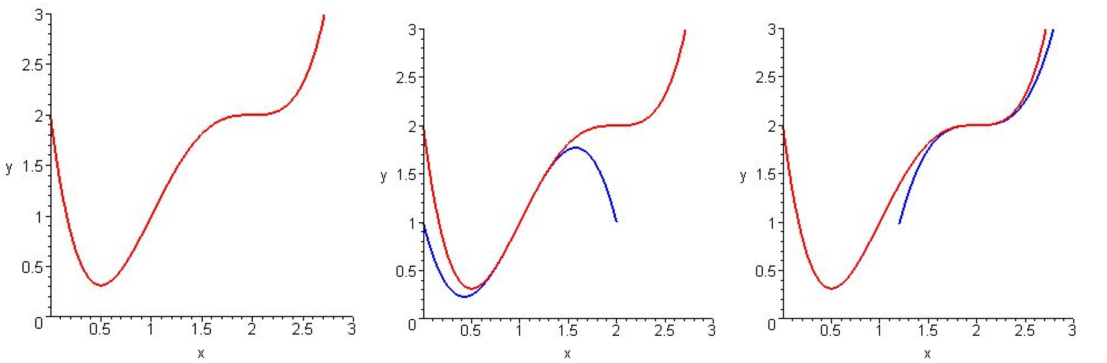
第二步：對每一個實根 a，檢查 $f''(a-)$ 和 $f''(a+)$ 是否異號？也就是檢查 $f''(x)$ 在 a 的左右兩側是否變號？其中 $a-$ 就是 a 的左的左邊一點點的意思，而 $a+$ 就是 a 的右編一點點的意思。或者，只要 $f'''(a)\neq 0$ ， $f''(a-)$ 和 $f''(a+)$ 就必然異號。

第三步：如果 $f''(x)$ 在 a 的左右兩側變號，或者 $f'''(a)\neq 0$ ，則 $(a,f(a))$ 就是 $f(x)$ 的一個反曲點。要如此檢查所有 $f''(x)=0$ 的實根。

舉例而言，令 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x+2$ ，f 在 $x\in[0,3]$ 的圖形如以下的左圖。求解 $f''(x)=12x^2-36x+24=0$ 得到兩個實根 1 和 2。用電腦算出 f 分別以 1 和 2 的泰勒形式如下：

$$f(x)=1+2(x-1)-2(x-1)^3+(x-1)^4=2+2(x-2)^3+(x-2)^4$$

從泰勒多項式看到 $f'''(1)\neq 0$ 而且 $f'''(2)\neq 0$ ，可見 f 有兩個反曲點，分別在 $(1,f(1))=(1,1)$ 和 $(2,f(2))=(2,2)$ ，而 f 在反曲點附近的圖形分別類似三次函數 $y=-2(x-1)^3+2(x-1)+1$ 和 $y=2(x-2)^3+2$ ，如以下的中圖和右圖所示。



最後，讓我們談談為什麼須要反曲點？舉一項基本理由：它是操作股票、期貨的基本工具之一。大家都知道，應該在低點買進，而在高點賣出。但是怎麼能知道什麼時候跌到最低？什麼時候漲到最高呢？投資的絕佳時機一閃即逝，金融從業人必須熟練許多數學工具，來協助走勢的判斷。多項式是一種最基本的模型，而反曲點也是重要的訊息。

投資者或操作者每天看盤，根據本日（或任一時間點）的單價，和過去三個（或更多）交易日的收盤價（或其他時間點的價格），作為四個（或更多）條件。而根據這些條件，可以採用第一章 3.1 節的牛頓插值方法，做成三次多項式（或

更高次）函數；其實還有其他方法做成更精確的函數。

我們可以用函數來描述營業額和定價的關係，或者用函數來描述今日和過去三個交易日的價格走勢，這些函數都可以用來描述經濟狀況，也可以用來（幫助）預測未來。它們的預測都有某種程度的參考價值。像這樣用來描述兩量關係並藉以預測未來的函數，通稱為**數學模型**。在生活中我們木材、塑膠、金屬製造飛機、跑車、妖怪的「模型」，在數學裡，我們用函數製造描述兩量關係的「模型」。

如果最近的走勢是下跌中，當反曲點發生的時候，代表下跌的情勢已經趨緩，而最低點就可能即將發生了。相對地，如果最近的走勢是上漲中，當反曲點發生的時候，代表上漲的情勢已經趨緩，最高點可能即將發生而轉為下跌了。投資者當然應該注意這些訊息。