

萊布尼茲符號

單維彰・2013 年 3 月

萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646—1716) 比牛頓小四歲，是活躍於歐洲的德國學者，他也發現了微積分的奧秘。雖然當年曾經爆發誰剽竊了誰的爭執，但是後世學者大多認為他們分別發現了早期的微積分算法，而且各有自己的方式。之前我們使用的大約是牛頓的符號，現在要介紹萊布尼茲符號。

為什麼要學兩套符號系統？比方說小學的算術符號寫 $3 \times 5 = 15$ ，到國中學了代數之後，因為 $3 \times x$ 實在不好看，所以我們把 $3 \times x$ 寫成 $3 \cdot x$ ，然後進一步簡化為 $3x$ 。可見數學確實可能在同一種觀念中，使用不同的符號系統。既然兩種符號系統都傳到今天，沒有淘汰其中一種，表示它們各有好處。

若 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ，則微分後得到導函數 $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。其運算也可以寫成 $[x^3 - \frac{1}{x}]' = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。我們也經常寫 $y = f(x)$ ，然後就可以寫 $y' = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。這一套符號系統，差不多就是牛頓符號。萊布尼茲的符號系統定義如下，它雖然比牛頓符號複雜，卻有美妙的用法。

萊布尼茲符號

$\frac{d}{dx} \left[x^3 - \frac{1}{x} \right]$ 表示將 $x^3 - \frac{1}{x}$ 對變數 x 微分，也就是 $\frac{d}{dx} \left[x^3 - \frac{1}{x} \right] = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。若 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ，則 $\frac{d}{dx} \left[x^3 - \frac{1}{x} \right]$ 可以簡記成 $\frac{d}{dx} f(x)$ 意思是將 $f(x)$ 對 x 微分，讀作「d over d x, f of x」。若 $y = f(x)$ ，則 $\frac{d}{dx} f(x)$ 又可以簡記成 $\frac{dy}{dx}$ ，意思是 y 對 x 微分，讀作「d y over d x」。

以下，讓我們看看萊布尼茲符號的來歷。回顧微分的極限定義

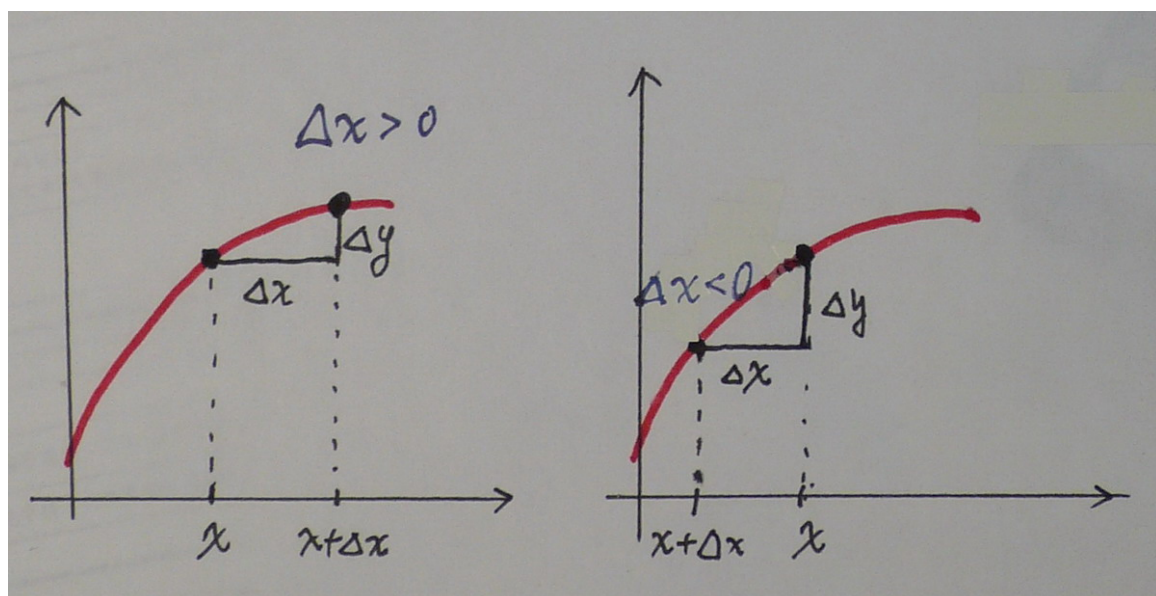
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

其中 $h = (x+h) - x$ 就是自變數從 x 變化到 $x+h$ 的差異。科學界經常用 Δx 表示「 x 的變化量」。其中 Δ 讀作 delta，它是對應 D 的大寫希臘字母（對應小寫 d 的是 δ ）。所以 Δ 其實就是 D 的另一種寫法，而 D 的意思是 Difference 的縮寫，Difference 就是「差異」的意思。所以 Δx 就是「 x 的差異」，引伸為 **x 的變化量**。

如果 $y = f(x)$ ，則自變數 x 變化之後，當然也造成 y 的變化。令

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

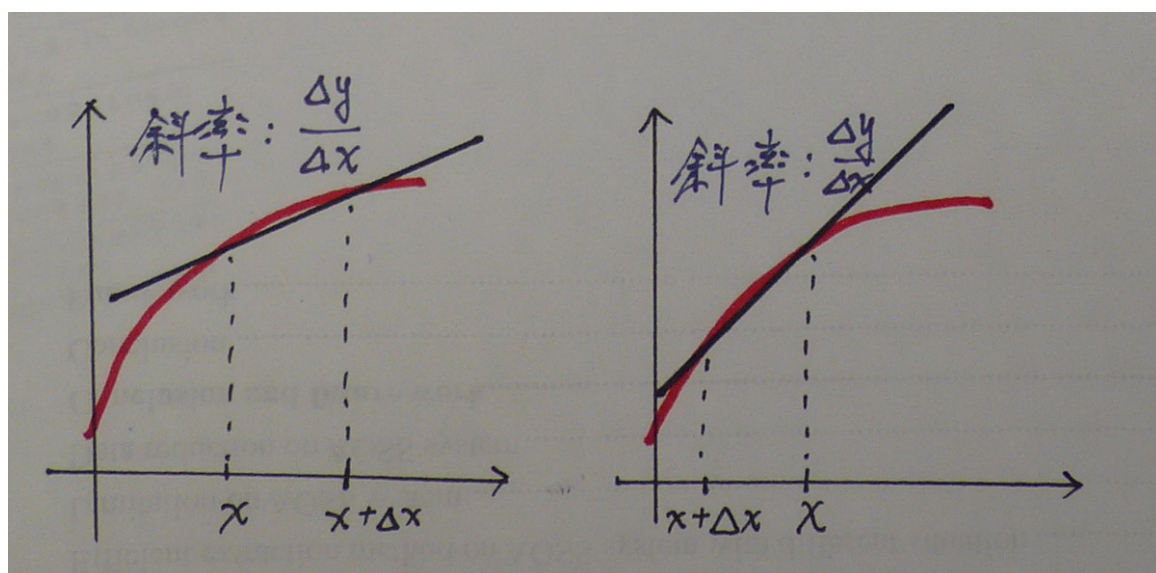
其中 Δy 就是「 y 的差異」，引伸為 **y 的變化量**。如下圖。



現在，分數

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ 的變化量}}{x \text{ 的變化量}}$$

的意義就是自變數產生 Δx 之變化時，函數 $y = f(x)$ 的**平均變化率**，又稱為**變化率**。從圖形來看，很明顯 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就是**割線斜率**，如下圖。



現在，微分的極限定義就可以寫成

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

意思就是，當 x 的變化愈來愈小時，變化率會是多少？我們不能真的將 $\Delta x = 0$ 代

入分式，這樣會形成無意義的 $\frac{0}{0}$ ；然而從過去的經驗知道 $\frac{0}{0}$ 只是種數學上的假象，我們可以藉由約分、通分、有理化等方法，算出上述極限，也就是導函數。雖然 x 不一定代表時間，但我們習慣上稱 Δx 趨近於 0 的極限變化率

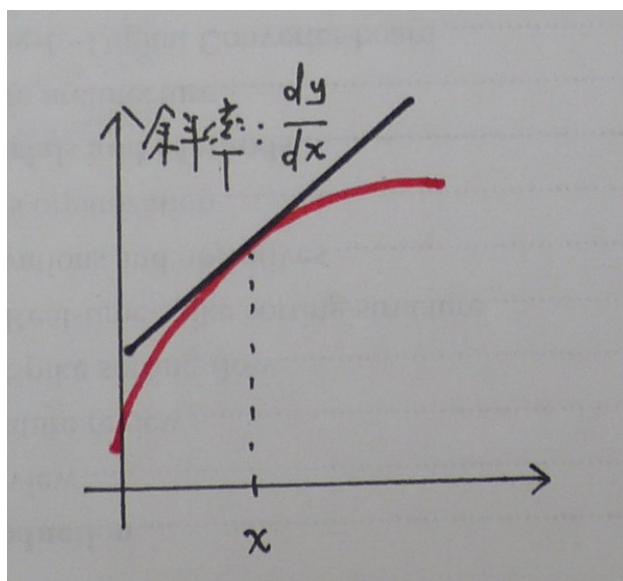
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

為**瞬間變化率**，或者就說是 **y 在 x 的變化率**。注意，在「 x 這一點」， y 應該也是一個數而沒有變化，本來不能討論它的變化率。但是，透過極限的觀念和操作，我們的確可以討論「 $y = f(x)$ 在 x 這一點的變化率」，它就是 $f'(x)$ 。

我們把 $\Delta x \rightarrow 0$ 的 Δx 寫成 dx （它不是真正的 0 ），把 Δy 寫成 dy ，就出現了萊布尼茲符號：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

如果 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是割線斜率，則 $\frac{dy}{dx}$ 就好像 $y = f(x)$ 在 x 這一點也有「割線」一樣；這條直線就是 $y = f(x)$ 的函數圖形在 x 的**切線**，而 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 就是 $y = f(x)$ 的函數圖形在 x 的**切線斜率**。如下圖。



運用萊布尼茲符號，我們知道 $\frac{dy}{dx}$ 是「**微量的分數**」，這就是「**微分**」的由來了。而因為相除的結果是「商」，所以中國大陸稱它為「**微商**」。