

微量符號用於估計

單維彰・2013 年 3 月・2017 年 4 月

萊布尼茲符號的一項好處，就是 $\frac{dy}{dx}$ 好像 dy 除以 dx 的分式。這項「類比」使得微分的某些操作變得像分式一樣可以通分、約分以及交叉相乘。

回顧 dx 和 dy 的由來是：把 $\Delta x \rightarrow 0$ 的 Δx 寫成 dx （它不是真正的 0），把 Δy 寫成 dy ，一旦將導函數 $\frac{dy}{dx}$ 看成一個分式，那麼分子 dy 和分母 dx 豈不也可以分開來看待？我們稱 dx 為 **x 微量**， dy 為 **y 微量**。微量是「趨近於 0 的差異量」，所以又稱為**微差**；它趨近於 0 但不是 0。配合著國語和英語的諧音，我們也稱 dx 為「一滴滴的 x 」， dy 為「一滴滴的 y 」。而

$$\text{因為 } f'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ 所以 } dy = f'(x) dx。$$

當自變數的變化量 Δx 不太大，則函數值的變化 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 也不太大。符號 Δ 希臘字母的 D ，代表 Difference 的意思，也就是**差異量**，所以 Δx 表示自變數 x 的差異，而 Δy 表示應變數 y 在 x 變成 $x + \Delta x$ 之後產生的差異。雖然 Δx 和 Δy 還沒有趨近於 0，但只要夠小了就可以視為

$$\Delta y \approx dy, \Delta x \approx dx。$$

所以我們可以利用微量 dy 來估計 Δy 。也就是 $\Delta y \approx dy = f'(x) dx \approx f'(x) \Delta x$ 。整理如下。

函數差異量的估計

當自變數 x 的差異量 Δx 不太大時，函數 $y = f(x)$ 的差異量 Δy 可用導數來估計：

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

舉例而言，令 $y = f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ，如果 x 從 2 變到 2.2，則 $x=2$ 而 $\Delta x = 0.2$ ，那麼函數的差異量就是 $\Delta y = f(2.2) - f(2)$ 。利用導數估計 Δy 的方法是

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x = f'(2) \times 0.2。$$

因為 $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，所以 $f'(2) = 12.25$ ，故 $\Delta y \approx 2.45$ 。

差異量的估計值可以反過來估計函數值。例如 $f(2.2) = (2.2)^3 - \frac{1}{2.2}$ 頗不容易計算，但是 $f(2.2) = f(2) + \Delta y$ ，而 $f(2)$ 很容易算： $f(2) = 2^3 - \frac{1}{2} = 7.5$ ，所以

$$f(2.2) = f(2) + \Delta y \approx 7.5 + 2.45 = 9.75 \text{ 。}$$

我們整理上述方法如下。

用導數估計函數值

當自變數 x 的差異量 Δx 不太大時，函數 $y = f(x)$ 在 $x + \Delta x$ 的值可用導數來估計：

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

有些同學可能察覺了，以上估計式，其實就是函數的「一次估計」，也就是將切線方程式寫成一次函數之後的估計法。現在換一個寫法，是為了練習微量 dx 和 dy 的用法。

當然，只要使用電腦就可以輕易算出 $f(2.2) = 10.1934\dots$ ，並不須要用導數來估計。這個「古典」的估計方法，有其理論上的價值，也不失為簡略估計的好辦法。