導數的邊際意涵

單維彰・2013 年 3 月

一般而言，$\dfrac{dy}{dx}$是 y 對 x 的**瞬間變化率**。這裡的「瞬間」不一定指時間，任何量都可以在「一滴滴」的小變化裡，談論瞬間變化率的問題。我們之前採用「位移對時間」的變化率來舉例，只是比較常見的一個特例。總之，dx 代表自變量 x 的一滴滴變化，dy 代表函數值 y 跟著做一滴滴的變化，相除之後的瞬間變化率 $\dfrac{dy}{dx}$ 可能很大也可能很小，可能是正的也可能是負的。

導數的萊布尼茲符號

令 $y = f(x)$ ，則 $f'(a)$ 的萊布尼茲符號記作 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ ，意思是 y 在 $x = a$ 處的導數，讀作「d y over d x at a」。

因為 $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$ ，意思是說，當 x 變了一滴滴，y 也跟著變了 $\dfrac{dy}{dx}$ 倍。顯然這個倍率通常與 x 有關，例如速度與運動的時間有關。所以導數 $f'(a) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ 強調了「當 $x = a$ 時」函數的瞬間變化率。

在經濟學的術語中，用**邊際** (marginal) 來稱變化率，例如，令 P 是獲利 (profit)，單位為「元」，x 是產量，單位為「個」，則 $\dfrac{dP}{dx}$ 稱為邊際獲利，而 $\left.\dfrac{dP}{dx}\right|_{x=a}$ 表示產量為 a 時，邊際獲利為 $\dfrac{dP}{dx}$ ，單位為「元/個」，或者說「每個 $\dfrac{dP}{dx}$ 元」。例如，$\left.\dfrac{dP}{dx}\right|_{x=100} = 3$ 的意思是：當產量為100個時，每多賣一個會獲利3元。你值不值得把產量從100提升到200呢？對於這個問題，經濟學家是這樣看的：如果產量是100，多賣一個多賺3元，而如果產量是200，多賣一個只多賺0.3元，則雖然還是會賺，但似乎就不值得把產量增加到200了！邊際獲利是經濟學很重視的問題。