

相關變化率範例一

單維彰・2013 年 3 月

吹氣球

想像我們要吹氣球。假設吹氣進入氣球的速度是固定的：每分鐘吹入 80c.c.或是 80 立方公分。然而，當氣球吹得愈大，就會變大得愈慢；這是因為當氣球的半徑越大，體積就越大，須要更多的氣使它的半徑再變大一點。讓我們用數學來解釋這個現象。

當球的半徑是 r ，它的體積是 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，單位是立方公分。將等式的左右兩側同時對時間 t 微分，則有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 \right] = \frac{d}{dr} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 \right] \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}。$$

此處 t 代表時間，單位是分鐘。假設吹氣的速率是固定的 80c.c./min，所以

$\frac{dV}{dt} = 80$ ，而 $\frac{dr}{dt}$ (單位 cm/min) 就是半徑擴張的比率，就是 $\frac{dr}{dt} = \frac{80}{4\pi r^2} = \frac{20}{\pi r^2}$ ；當球吹得愈大，即半徑愈大時，半徑的變化率會變小。

例如，當 $t=1$ ， $V=80$ ， $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 80}{4\pi}} \approx 2.8$ ，則 $\frac{dr}{dt} \approx \frac{20}{4\pi \cdot 2.8^2} \approx 0.83$ ，亦即吹氣 1 分鐘之後，氣球的半徑每分鐘膨脹 0.83 公分；但是吹氣 3 分鐘之後，因為 $t=3$ ， $r \approx 3.9$ ，則 $\frac{dr}{dt} \approx 0.42$ ，所以氣球的半徑每分鐘膨脹 0.42 公分。可見當氣球吹得愈久，它的膨脹就愈慢。