

# 積分

單維彰 · 2013 年 4 月

「微積分」其實就是「微分」和「積分」的合併名稱；顧名思義，這門學問或者工具，以微分和積分為主要成分。我們之前學習了微分，而積分（就技術層面而言）其實就是反過來的微分。在這一章裡，我們學習積分的概念、算法、意涵，以及它的典型應用。

「積分」在中文可以是名詞或動詞。其英文動詞是 *integrate*，是「做積分」的意思，而英文名詞是 *integral*，是「積分式」的意思。我們在微分之後說明積分，因為它們之間的關係，類似小學的乘法和除法的關係。我們先學乘法，之後學除法。做直式的除法計算時，每個小步驟其實還是在做乘法。可見除法其實是乘法反過來的計算；並沒有一個計算除法的獨立算法，只要先練熟乘法，就能應用在除法上。

以下，我們就先從微分的「反運算」來認識積分，並且發展積分的基本公式。然後，我們要說明，就像微分又可以細分成算「導數」和求「導函數」兩種技術，積分也可以細分成算「定積分」（算出一個數）和求「不定積分」（寫出一個函數）兩種技術。最後，我們舉出幾項積分的典型意涵和應用。

積分就是還原微分，例如  $\int dy = y$ ，意即將  $dy$ （一滴滴的  $y$ ）還原為  $y$ 。積分符號  $\int$  表示積分的動作，做在  $dy$  上則形成一個積分式  $\int dy$ ，而這個式子的意思就是將  $dy$  還原為  $y$ 。符號  $\int$  其實是拉長的 S，而 S 是「加總」Summation 的意思；積分  $\int dy$  的意思是：將無窮多個微量  $dy$  加在一起，還原成  $y$ 。

$y$  通常是  $x$  的函數。以  $y = x^2 + x + 1$  為例，我們知道其微分  $y' = 2x + 1$  又可以用萊布尼茲符號寫成  $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ 。後來又知道  $dy$  跟  $dx$  可以獨立處理，於是寫成  $dy = (2x + 1)dx$ 。如果在等號兩側做積分，可以寫成

$$\int dy = \int 2x + 1 dx,$$

其中  $2x + 1$  稱為被積分函數 (integrand)，注意被積分函數與微量  $dx$  之間要留一點空格。如果事先知道  $y = x^2 + x + 1$ ，則等號右側的積分式  $\int 2x + 1 dx$  還原成  $x^2 + x + 1$  就好，但問題是，如果事先不知道呢？那就要找一個函數  $y = f(x)$ ，使得  $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ 。