

反導函數

單維彰・2013 年 4 月

如果事先知道 $y = x^2 + x + 1$ ，則將積分式 $\int 2x + 1 \, dx$ 還原成 $x^2 + x + 1$ 就好，但問題

是，如果事先不知道呢？那就要找一個函數 $y = f(x)$ ，使得 $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ 。

根據我們對微分的認識，知道不止 $x^2 + x + 1$ 的微分是 $2x + 1$ ，其實 $x^2 + x$ 、 $x^2 + x - 7$ 、 $x^2 + x + \sqrt{2}$ 、 $x^2 + x - 3^5 \dots$ 的微分都是 $2x + 1$ 。由此可見，因為常數項的微分是 0，所以 $x^2 + x$ 加上任何常數都可能是 $\int 2x + 1 \, dx$ 的答案！我們習慣用 C 表示那個「任何常數」，因此

$$\int 2x + 1 \, dx = x^2 + x + C。$$

根據以上等式，看起來積分 $\int 2x + 1 \, dx$ 有無窮多個答案，但這個說法略嫌誇大。

其實也不過就是「某個特定函數」加上「任意常數」而已。又可以說 $\int 2x + 1 \, dx$ 的答案彼此相差一個常數，它們的函數圖形是同一條曲線上下平移的結果。

上述「某個特定函數」就是「反導函數」。回顧 $\int 2x + 1 \, dx = x^2 + x + C$ 的答案由兩部分組成：前面的 $x^2 + x$ 滿足 $[x^2 + x]' = 2x + 1$ ，我們稱 $x^2 + x$ 是 $2x + 1$ 的「一個」**反導函數**。而後面再加一個「任意常數」 C 就好了。加上任意常數之後的無窮多個函數 $x^2 + x + C$ 是 $2x + 1$ 的「所有」反導函數。

現在我們知道了， $\int f(x) \, dx$ 的意思就是要找到 $f(x)$ 的「所有」反導函數。但是這無窮多的「所有」並不困難，只要找到「一個」再 $+C$ 就成了。求「所有」反導函數的過程，又稱為**不定積分**，記作 $\int f(x) \, dx$ 。而如果 $F'(x) = f(x)$ ，則

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C。$$