積分基本公式

單維彰・2013 年 4 月

以 $\int x+1\,dx$ 為例，首先要問誰的微分是 $x+1$？因為微分可以逐項地做，因此我們也可以逐項地做反導函數，步驟如下。

1. **考慮 x 的反導函數：**誰的微分是 x？x 是一次式，微分會把二次降成一次，因此先猜測有一個 x^2。但是 x^2 的微分是 $2x$，我們要的是 x，怎麼辦呢？只要乘上係數 $\frac{1}{2}$，便可以得到 $\left[\frac{1}{2}x^2\right]'=x$。

2. **考慮 1 的反導函數：**顯然 x 的微分是 1。

所以 $\frac{1}{2}x^2+x$ 是被積分函數 $x+1$ 的「一個」反導函數，加上未定的常數項 C，得到 $\int x+1\,dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$。

再以 $\int x^3+3x^2-4x-6\,dx$ 為例，逐項地做出 x^3+3x^2-4-6 的「一個」反導函數，步驟如下。

1. 考慮 x^3 的反導函數：x^4 的微分會變成三次。根據微分公式，已知 $[x^4]=4x^3$。但是希望微分後係數為1，故乘以係數 $\frac{1}{4}$，得 $[\frac{1}{4}x^4]'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3$。

2. 考慮 $3x^2$ 的反導函數： x^3 微分後會是 $3x^2$，恰好為所求。

3. 考慮 $-4x$ 的反導函數：把負號當作「減法」記號，只要記得保留減法就好，不必管它。考慮 $4x$ 的反導函數。x^2 的微分變成 $2x$，須要的係數是 4，故乘以 2，得 $[2x^2]'=4x$。

4. 考慮 -6 的反導函數：同樣把負號當作「減法」記號，不管它，只做 6 的反導函數。顯然 $[6x]'=6$。

至此，記得將剛才的「負號」都寫成「減法」，就得到 x^3+3x^2-4-6 的「一個」反導函數 $\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2-6x$，加上未定的常數項 C，得到 $\int x^3+3x^2-4x-6\,dx$ $=\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2-6x+C$。

根據上述的例子，應該已經可以看見一個規則。已知 $[x^{r+1}]'=(r+1)x^r$，因此 $\frac{1}{r+1}[x^{r+1}]'=\frac{r+1}{r+1}x^r=x^r$，推得基本公式：

x^r 的「一個」反導函數為 $\frac{1}{r+1}x^{r+1}$，其中 $r \neq -1$，

因為分母 $r+1$ 不得為零。以上公式排除了 r=1 亦即 $\frac{1}{x}$ 的情況，我們以後再處理 $\frac{1}{x}$ 的反導函數。