# 定積分的總量意涵

**單維彰・2013 年 4 月**

我們可以利用單位來協助思考。如果 $x$ 代表時間，單位為秒， $f(x)$ 的代表速度，單位為「公尺／秒」，則 $f(x)\cdot dx$ 的單位不就是「公尺／秒」× 秒＝公尺嗎？既然 $\int_a^b$ 表示加總，它的單位還是 $f(x)\cdot dx$ 的單位，也就是「公尺」，這樣就可以想像 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示位移。

在我們進一步探討定積分的典型應用以前，先練習一下計算吧。以 $\int_1^2 2x+1\,dx$ 為例，我們要先找出 $2x+1$ 的一個反導函數 $F(x)=x^2+x$ ，然後計算 $F(2)-F(1)$ 。這個程序用到一個臨時的符號 $F(x)$ ，不太經濟，所以發明了新符號：

$$\left[x^2+x\right]_a^b \quad \text{或者} \quad x^2+x\Big|_a^b$$

代表「將 $x=b$ 代入 $x^2+x$ 的值」減掉「將 $x=a$ 代入 $x^2+x$ 的值」。用這組新符號，我們可以計算

$$\int_1^2 2x+1\,dx=\left[x^2+x\right]_1^2=[6]-[3]=3 \text{ 。}$$

前面我們用自由落體當做定積分意涵的範例。其實，凡是直線運動皆可以作為範例。如果函數 $y=f(x)$ 是直線運動的位置 $y$ 與時間 $x$ 的關係，則 $f(x)$ 的變化率是速度，其單位為 $\dfrac{\text{位移}}{\text{時間}}$ 。而 $dx$ 的單位還是「時間」，所以

$$\left(f(x)\text{ 的變化率}\right)\cdot dx \quad \text{的單位是} \quad \frac{\text{位移}}{\text{時間}}\times\text{時間}=\text{位移}$$

而 $\left(f(x)\text{ 的變化率}\right)\cdot dx$ 的意義可以解讀為

**在 $x$ 那一瞬的位移**

而 $\int_a^b$ 的意思是把從 $a$ 到 $b$ 之每一瞬 $x$ 的位移加在一起，也就是直線運動 $y=f(x)$ 的總位移。

將直線運動的詮釋拓展到一般函數 $y=f(x)$ ，我們就可以這樣理解微積分基本定理：

$$\int_a^b f'(x)\,dx=\int_a^b\left(f(x)\text{ 的變化率}\right)dx=f(x)\text{ 從 }a\text{ 到 }b\text{ 的總變化量}=f(b)-f(a)$$

看夠了物理的詮釋，讓我們回到經濟模型的邊際意涵吧。以獲利為例，若 $P(x)$ 代表銷售量為 $x$ 時的利潤，邊際獲利就是 $P(x)$ 的變化率 $= P'(x) = \dfrac{dP}{dx}$。積分 $\int_{100}^{110} P'(x)\,dx$ 的意義就是銷售量從 100 成長到 110 所增加的利潤。當然，那就是 $P(110) - P(100)$。

如果我們已經知道直線運動的位移函數 $f(x)$ 或者獲利函數 $P(x)$，當然就不必再做積分，直接用減法就能計算總變化量。有趣的情況就是，有時候我們比較容易得知速度或邊際獲利，也就是位移和獲利的變化率，而不是它們本身。例如，同學們應可想像，只要隨時紀錄車上的時速表，就能獲得速度函數。這時候，積分就是我們從函數的變化率去計算變化總量的方法。