

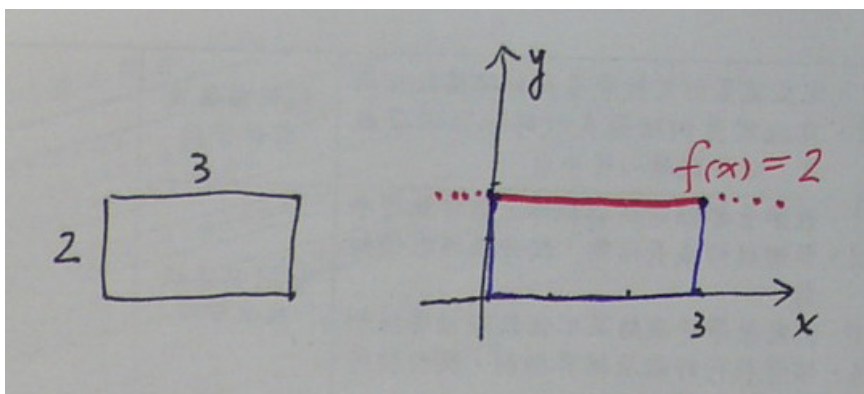
定積分的面積意涵

單維彰・2013 年 4 月

當被積分函數 $f(x)$ 代表某個量 y 對 x 的變化率 $\frac{dy}{dx}$ ，則定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示：當 x 從 a 變化到 b 時， y 的總變化量；也就是 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ，其中 $y = F(x)$ 而且 $F'(x) = f(x)$ 。除了「總量」的意義以外，積分還有面積的意涵。本

當 x 表示一個平面圖形的水平位置，而 $f(x)$ 表示圖形在 x 處的高度，假設單位都是公尺，則 dx 「一滴滴的寬度」單位還是公尺，所以 $f(x) \cdot dx$ 的單位是平方公尺；這給了我們很好的暗示，說明 $\int_a^b f(x) dx$ 表示面積。

先舉一個簡單的例子。考慮一個寬為 3，高為 2 的長方形（單位略），大家都知道面積是 6。我們可以將此長方形坐標化，使其頂點分別落在 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 、 $(0,2)$ 和 $(3,2)$ 上。此長方形上方的邊就是被截在 $x=0$ 與 $x=3$ 之間的常數函數 $f(x)=2$ ，如下圖。

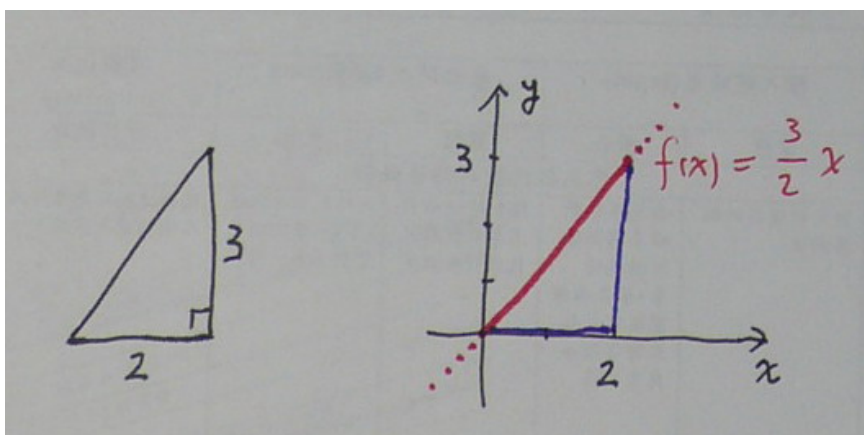


而我們對 $f(x)=2$ 從 $x=0$ 到 3 做積分得到

$$\int_0^3 2 dx = [2x]_0^3 = [6] - [0] = 6。$$

的確，積分的結果就是長方形面積。

再考慮一個例子：底邊是 2，高是 3 的直角三角形（單位略），大家都知道面積是 3。為它配上坐標系統，使其頂點分別落在 $(0,0)$ 、 $(2,0)$ 和 $(2,3)$ 上。此直角三角形的斜邊是被截在 $x=0$ 與 $x=2$ 之間的直線函數 $f(x) = \frac{3}{2}x$ ，如下圖。

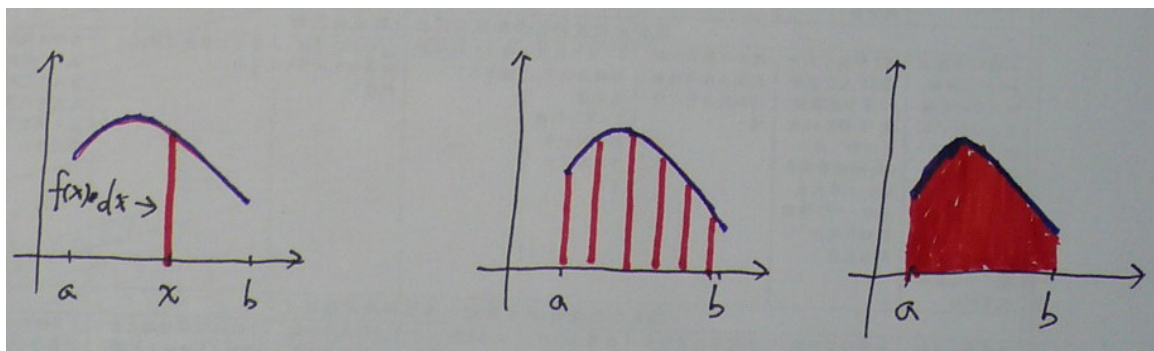


做積分的結果是

$$\int_0^2 \frac{3}{2}x \, dx = \left[\frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 = [3] - [0] = 3,$$

再一次地印證了積分就是面積的想法。

一般而言，令 $y = f(x)$ 代表 x 從 a 變化到 b 時，每一個 x 對應的高度。則對一個 x 而言， $f(x) \cdot dx$ 可以想像是高為 $f(x)$ 之鉛直線段的「一滴滴面積」，如以下的左圖。不同的 x 對應不同高度的鉛直線段，它們各自的「一滴滴面積」自然應該有所不同，如以下的中圖。



將每一個介於 a 與 b 之間的 x 所對應的鉛直線段全部畫出來，當然就會佈滿整個

以 $x=a$ 為左邊界，以 $x=b$ 為右邊界，以 x 軸為底邊，以 $y = f(x)$ 為上邊

的區域，如以上的右圖。而 $\int_a^b f(x) \, dx$ 就表示那個區域的面積。

想想看，這是件多麼酷的發現！以前，我們只知道如何計算三角形、規則四邊形、圓形和它們推導出來的少部分平面形狀的面積，現在們可以一舉處理許多種的面積了。