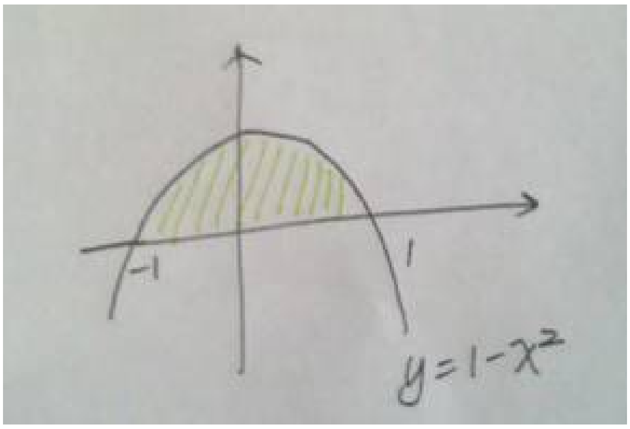
弓形面積

單維彰・2013 年 4 月

以前學過的「弓形」是指一段圓弧與弦所形成的形狀，利用扇形扣除一個三角形，可以得知圓上的弓形面積。現在，我們要舉例說明，拋物線上的「弓形」面積可以用積分算出來。先舉一個特例：我們知道 $y=1-x^2$ 是一個開口向下的拋物線，它和 x 軸所圍成的區域，就是一個（拋物線的）弓形，如下圖。

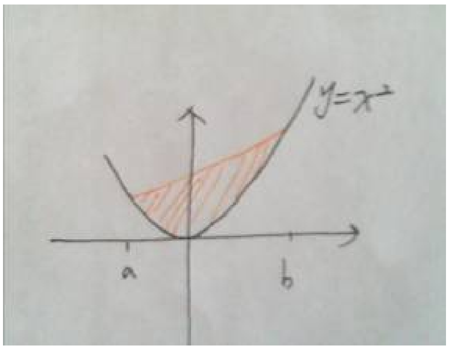


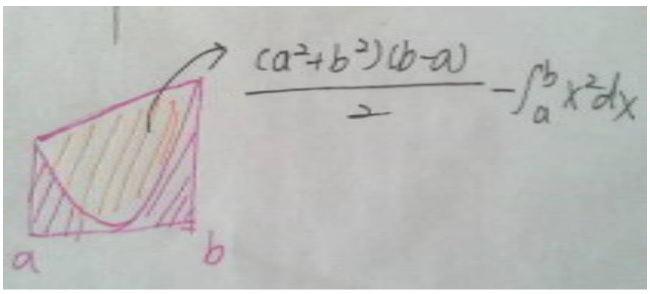
可以想像拋物線是一座拱橋，而 x 軸是水平面，要求拱橋下方的面積。由圖觀察，所求的面積是 x 從 -1 到 1，x 軸以上而 $y=1-x^2$ 以下的面積，所以積分之計算如下：

$$\int_{-1}^{1} 1-x^2\ dx = [x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = [\frac{2}{3}]-[-\frac{2}{3}] = \frac{4}{3}$$

如果單位是公丈（10 公尺），則拱橋下的面積為 $\frac{4}{3}\times 100 = 133\frac{1}{3}$ 平方公尺。

一般而言，（拋物線的）弓形是指拋物線和任一條割線之間所圍的區域。考慮典型的拋物線 $y=x^2$，令 $a<b$ 且在 (a,a^2) 與 (b,b^2) 之間做割線段，則割線下方與拋物線上方所圍的區域，便是一個弓形，如以下的左圖。





但是，積分只能做曲線「下」的面積，而上圖的面積卻在拋物線之上，怎麼辦呢？只要將 a 與 b 之間的梯形面積，減掉 $y=x^2$ 以下的面積（可以用積分得

到)，便是所求的弓形面積了，如以上的右圖。圖中的梯形，互相平行的兩邊(上底和下底)分別在左側和右側，而其長度分別為a^2和b^2；兩平行邊之間的距離(梯形的高)則是$b-a$，所以梯形面積為$\frac{(a^2+b^2)(b-a)}{2}$。因此，所求的弓形面積為

$$\frac{(a^2+b^2)(b-a)}{2}-\int_a^b x^2\,dx \text{ 。}$$

其中的積分部分為$\int_a^b x^2\,dx=[\frac{1}{3}x^3]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}$，代回弓形面積算式並化簡：

$$\begin{aligned}\frac{(a^2+b^2)(b-a)}{2}-\int_a^b x^2\,dx &= \frac{a^2b+b^3-a^3-ab^2}{2}-\frac{b^3-a^3}{3}\\ &=\frac{b^3-a^3}{6}+\frac{a-b}{2}ab\\ &=\frac{(b-a)(a^2+2ab+b^2)}{6}-\frac{b-a}{2}ab\\ &=\frac{b-a}{2}\cdot\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{3ab}{3}\right]\\ &=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{(a-b)^2}{3}\\ &=\frac{(b-a)^3}{6}\end{aligned}$$

弓形面積有一個很簡單的公式：$\frac{(b-a)^3}{6}$。前面的特例(拱橋下面積)相當於$a=-1$和$b=1$的情況，代入公式得到面積

$$\frac{\left(1-(-1)\right)^3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\text{ ，}$$

當然是一樣的答案。早在西元前 200 年左右，阿基米德在研發武器的過程中，便計算了弓形面積並得到以上公式。但是，阿基米德的時代還沒有積分，他用的是早期的無窮等比級數方法。這裡的重點並不是要導出公式，而是讓同學知道，大約兩千兩百年前，偉大的學者阿基米德曾經用高超的數學功力求出這條公式，應用在在他設計的武器上。而今，我們有了威力更強大的工具：積分，使得一般的大學生都可以像兩千多年前偉大的數學家一樣，推導出相同的公式。