積分的計算

單維彰・2015 年 5 月

用 Maxima 做積分的指令是 integrate ，它就是「積分」的動詞，「定」或「不定」都一樣，只是參數不同。

做不定積分 $\int f(x)\,dx$ 的指令形式是

integrate(f(x), x)

例如

```
integrate(x^2,x);
```

就是 $\int x^2\,dx$ 的意思，得到 $\frac{1}{3}x^3$ ，注意 Maxima 沒有為我們「+C」，要自己記得這個未定常數： $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ 。

至於做定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的指令則有四個參數

integrate(f(x), x, a, b)

例如

```
integrate(x^2, x, -1, 1);
```

就是 $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ 的意思，得到 $\frac{2}{3}$ 。

以上舉的例子很簡單，那是因為只要學會輸入複雜的函數，Maxima 就會執行。例如想作 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ，可以先輸入被積分函數

```
x/sqrt(x^2+1);
```

確定沒錯之後，再輸入

```
integrate(%o3, x);
```

其中 %o3 只是舉例，視實際情況決定參數。於是我們得到

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C \text{ 。}$$

但是，積分不像微分：不管多麼複雜的函數，只要寫得出數學式，就能做出導函數。可是積分就不見得算得出反導函數。甚至，有些看起來頗單純的數學式，積分之後會出現還不認得的反導函數。例如由指令

```
integrate(1/x , x);
```

得知

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$$

有些人認識 log，但其實它並不是「常用對數」的意思。而看起來不太複雜的 $\sqrt{1+x^2}$ 得到很複雜的反導函數：

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

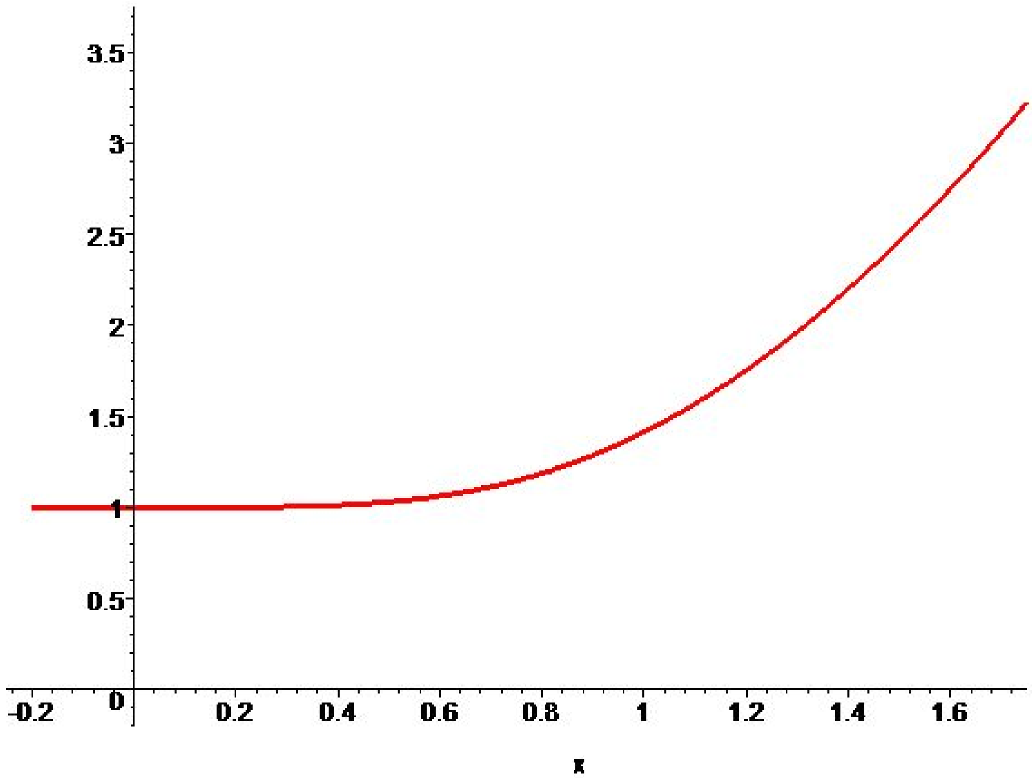
還有更嚴重的，就像

```
integrate(sqrt(1+x^4) , x);
```

得到的會應居然是把題目照抄一遍：

$$\int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

這就表示 Maxima 根本不會做。但這不一定是 Maxima 的錯，有些函數確實沒有（由基本函數組成的）反導函數。但是 $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ 卻是個簡單的連續函數，其圖形如下；它對稱於 y 軸，但是現在並不重要。



由上圖可知，雖然 $\sqrt{1+x^4}$ 沒有反導函數，亦即寫不出一個（基本）函數 $F(x)$

使得 $F'(x)=\sqrt{1+x^4}$ ，但 $y=\sqrt{1+x^4}$ 的曲線下面積卻顯然是存在的。例如

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx$$

是存在的，它的意義就是 $y=\sqrt{1+x^4}$ 與 x 軸之間，在 $0\le x\le 1$ 範圍內的面積，只是它不能用微積分基本定理 $F(1)-F(0)$ 計算而已。這種情況下，我們要用**數值積分** (Numerical Quadrature)！這是某種計算機演算法，不計算反導函數而直接估計曲線下的面積。在教學影片中，我們示範 Maxima 之數值積分的操作程序，其指令為

```
quad_qags(sqrt(1+x^4), x, 0, 1);
```

得到的結果，共有四個數：

```
[1.089429413224822,    1.2095096182660719*10^-14,    21,    0]
```

第一個數 1.0894… 就是 $\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx$ 的估計值，也就是說

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \approx 1.09$$

第二個數表示 $1.2095\ldots\times 10^{-14}$ ，這個大約 10^{-14} 的數是 Maxima 估計的計算誤差，也就是說 1.0894… 和真正的 $\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx$ 之間的絕對差異，大約是 10^{-14} ，我們可以相信估計值到小數點下 13 位。

第三個數 21 表示「迭代次數」，也就是計算過程中，一共算過幾次 $\sqrt{1+x^4}$ 的函數值。最後一個數是「錯誤編碼」，而 0 是好消息：沒有錯誤。