曲線間的面積

單維彰・2013 年 4 月

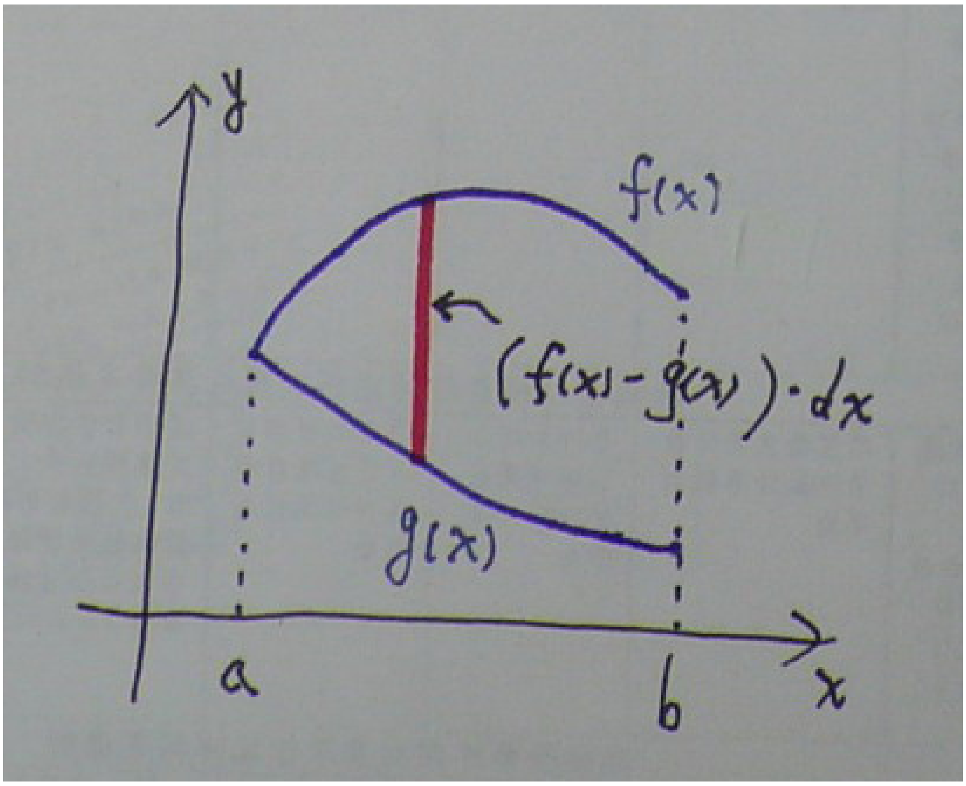
如果 $f(x)$ 的圖形在 x 軸上方，也就是 $f(x)>0$ ，則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示在 a 與 b 之間的「曲線下面積」，也就是在 $y=f(x)$ 曲線之下，在 x 軸之上的面積。而 x 軸的方程式是 y=0，且 $\int_a^b f(x)\,dx$ 也等於 $\int_a^b \left(f(x)-0\right)dx$ ，這個「曲線下面積」的觀念可以拓展為「曲線間面積」。只要有一條曲線在上，另一條在下，則上方減下方的積分，就是兩曲線之間的面積。整理說明如下。

曲線間面積

若在 $a \le x \le b$ 範圍內有兩個函數，其中一個恆大於另一個，也就是其中一條曲線恆在另一條上方，除了在 a 或 b 可能有交點以外，如以下示意圖。則

$$\int_a^b (\text{上方})-(\text{下方})\,dx$$

就是兩曲線之間在 $a \le x \le b$ 範圍內的面積。

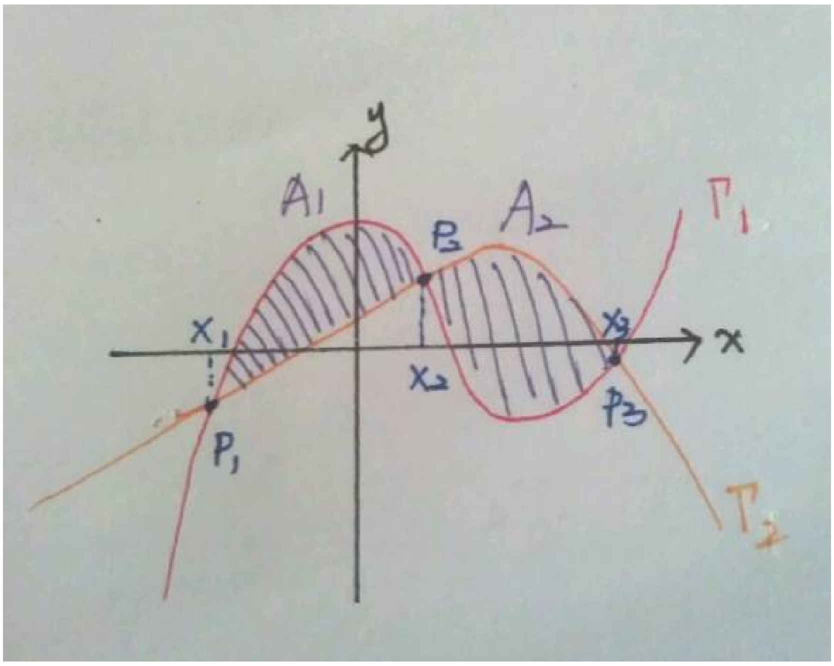


注意，被積分函數表示兩函數之間在 x 位置上的線段長度，如圖中的紅色線段，所以不得小於零。因此，一定要用上方曲線的函數，減掉下方曲線的函數；減錯方向就會出現負數，那就與「長度」的幾何意義不合了。

現在舉一個例子。參照下圖，給定兩條曲線

$$\Gamma_1: \ y = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad \Gamma_2: \ y = -x^2 + 2x$$

試求Γ_1與Γ_2「之間」的面積。



所謂「之間」的意思是被Γ_1和Γ_2包圍起來的區域。所以，我們必須先找到兩條曲線的交點。如圖，令交點由左至右為$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，和$P_3(x_3, y_3)$，其x坐標依序為x_1，x_2，和x_3。兩曲線在$x < x_1$和$x > x_3$的情況下，不再有交集。由圖可以看出被包圍的面積有A_1和A_2兩塊：A_1在x_1與x_2之間，A_2在x_2與x_3之間。因此，Γ_1與Γ_2「之間」的面積就是$A_1 + A_2$。為了寫出積分式，我們還得分辨哪條曲線在上、哪條曲線在下？

畫圖觀察，A_1區域的Γ_1在上、Γ_2在下，而A_2區域的Γ_2在上、Γ_1在下。所以

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left(x^3 - 3x^2 + 1\right) - \left(2x - x^2\right) \, dx \quad , \quad A_2 = \int_{x_2}^{x_3} \left(2x - x^2\right) - \left(x^3 - 3x^2 + 1\right) dx$$

至於三個交點的x坐標，就得求解$x^3 - 3x^2 + 1 = -x^2 + 2x$，也就是求解

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

詳情不表，我們得到三個交點的x坐標，從左到右為$x_1 = -1$，$x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$，$x_3 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$。然後，也許透過電腦的協作，得到

$$A_1=\frac{5^{5/2}-51}{24}+\frac{13}{12}\text{ ，}A_2=\frac{5^{5/2}+51}{24}+\frac{5^{5/2}-51}{24}\text{ 。}$$

相加得到所求的面積為$\frac{5^{5/2}+51}{24}+\frac{5^{5/2}-51}{12}+\frac{13}{12}$。如果不喜歡看到指數符號，可以用估計值，約為 5.95。可以說面積差不多是 6 平方單位。