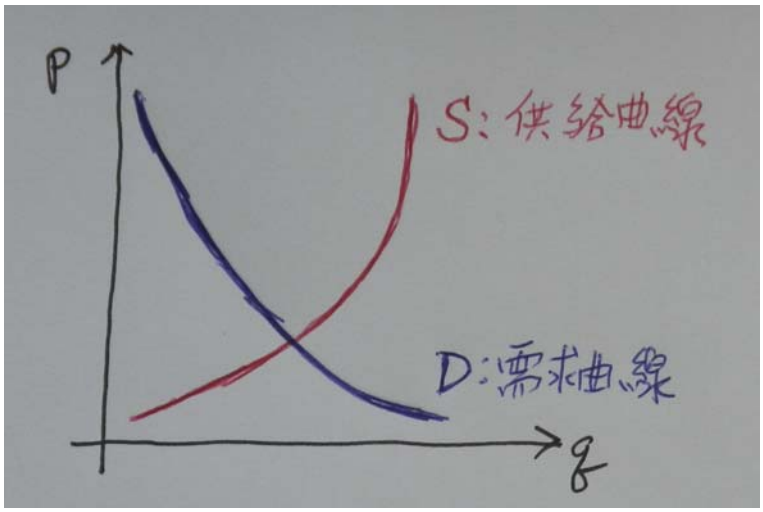
供需平衡

單維彰・2014 年 5 月

這裡以經濟學的應用為例，說明曲線間的面積有何用處。所謂「供需」就是「供給」和「需求」的總稱，這兩個互動的觀念，是經濟學的核心課題。特別提醒同學們的是，經濟學的「需求」不是指心理上的想望或生理上的需要，而是消費者在給定價格上願意且能夠購買的量。當然，探討這種問題的時候，都難免要限定地區（例如台灣本島市場、某個校園）和時間（例如每日或每週），也要給定價格和生產量、銷售量的單位。但是我們都不處理這些問題，只專注在數學上。

如同大家都有的概念，價格高時，消費者的購買意願較低，也就是需求低；價格變低，購買意願升高，則需求會變大。所以需求函數 (demand function) D: $q = f(p)$ 的需求量 q 通常隨著價格 p 增高而遞減。反過來，價格好的時候吸引人加入生產的行列，所以產量較高；價格跌落時，生產者興趣缺缺，產量就降低了。所以供給函數 (supply function) S: $q = f(p)$ 的供給量 q 通常隨著價格 p 增高而遞增。

雖然價格 p 是自變量（供給和需求都由價格決定），但是經濟學者卻習慣以縱軸表示價格 p，以橫軸表示商品（貨物或服務）的量 q 來繪製圖形，也就是**需求曲線** (demand curve) 和**供給曲線** (supply curve)，合稱為供需曲線。因為需求或供給量、價格都不會是負的，所以討論供需曲線時，只看第一象限；第一象限以外在經濟學上沒有意義。如下圖。



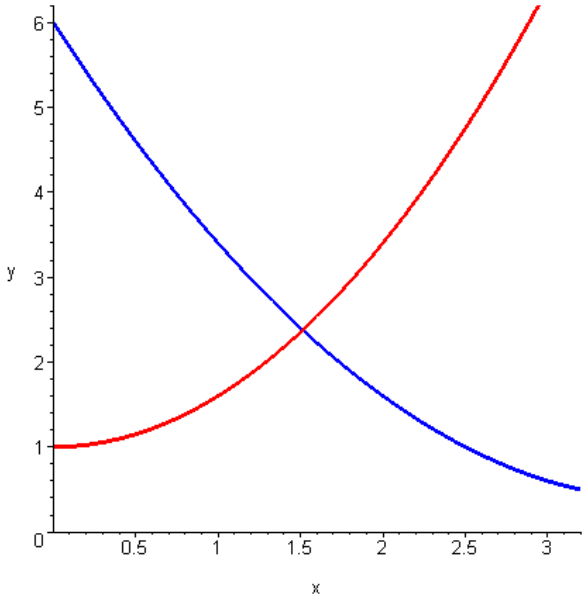
供需曲線的合併解釋，就像大家的生活經驗一樣。例如，當白菜很貴的時候，大家就索性不吃白菜了，但是菜農卻想多種點白菜來賣。一不小心又生產過剩，導致價格下跌，大家都去超市搶購便宜的白菜，但是盤商卻不想賣了。可見供應量跟需求量最好能達到一個平衡點，才會天下太平。

現在，回到數學的習慣，將價格 p 記為需求曲線和供給曲線的應變數，並以 x 表示自變數（前面說的需求量或供給量 q），例如以下是需求曲線和供給曲線的

數學函數（單位略）：

$$D:\ \ p = 0.4x^2 - 3x + 6\ ,\ \ S:\ \ p = 0.6x^2 + 1$$

同學們也可以這樣理解：上述函數的「反函數」才是真正的需求函數與供給函數。此時的供給函數和需求函數都是開口向上的拋物線，只是需求函數比較扁一點，供給函數比較彎一點。如下圖，藍色曲線是 D: 需求曲線，紅色曲線是 S: 供給曲線。



當我們用數學模型來探討供需曲線，則兩條曲線的交點，稱為**供需平衡**；在這種價格上，產量恰等於需求量，不會生產過剩也不會有人買不到。承上例，求解

$$0.4x^2 - 3x + 6 = 0.6x^2 + 1$$

得到兩個實根

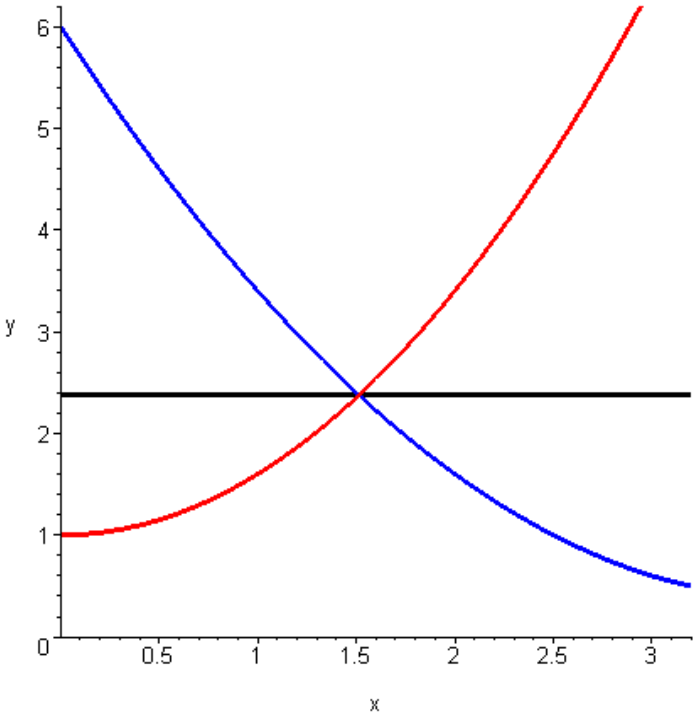
$x \approx 1.5139$ 和 $x \approx -16.5139$，

負不合，故得

$$x_0 \approx 1.5139\ ,$$

$$p_0 = 0.6x_0^2 + 1 \approx 2.3751\ 。$$

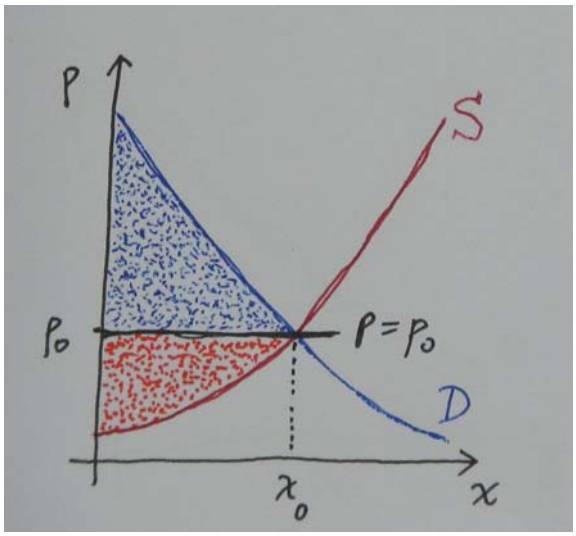
假設供需平衡的發生點是 (x_0, p_0)，稱為平衡點，就是右圖中的曲線交點；過交點畫一條水平線 $p = p_0$，稱為平衡線，如右圖中的黑色水平線。



經濟學用曲線間的面積定義兩種「剩餘」[1](Surplus)，說明如下。

消費者剩餘・生產者剩餘

在需求曲線 D 與平衡線 $p = p_0$ 之間的面積，如下圖中的藍色部分，稱為**消費者剩餘**。在供給曲線 S 與平衡線 $p = p_0$ 之間的面積，如下圖中的紅色部分，稱為**生產者剩餘**。



從圖形觀察，藍色部分的面積（消費者剩餘）就是 $0 \le x \le x_0$ 範圍內的需求曲線下面積，減掉以原點 $(0,0)$ 和平衡點 (x_0, p_0) 為頂點的長方形面積。承上例，消費者剩餘就是

$$\int_0^{x_0} D\,dx - x_0 p_0 \approx \int_0^{1.5139} 0.4x^2 - 3x + 6\,dx - 1.5139 \times 2.3751 \approx 2.5125 \text{ 。}$$

類似地，紅色部分的面積（生產者剩餘）就是以原點 $(0,0)$ 和平衡點 (x_0, p_0) 為頂點的長方形面積，減掉 $0 \le x \le x_0$ 範圍內的供給曲線下面積。而上例之生產者剩餘就是

$$x_0 p_0 - \int_0^{x_0} S\,dx \approx 1.5139 \times 2.3751 - \int_0^{1.5139} 0.6x^2 + 1\,dx \approx 1.3878 \text{ 。}$$

如果消費者等到價格降低至 p_0 的時候才買，則集體而言可以比價格較高時省下藍色區塊的錢，這就是消費者剩餘。如果供給者把產量提高到 x_0，則集體而言可以比產量較低時多收入紅色區塊的錢，這就是生產者剩餘。供需平衡是生產者和消費者的雙贏局面，而雙方的贏面就是各自的剩餘。關於這兩種剩餘的經濟意義，同學們應該在專業課程中學習，此處只提出它們的計算方法。

[1] 共產主義的經濟學者對於「剩餘」有其特殊的說法，不在此述。