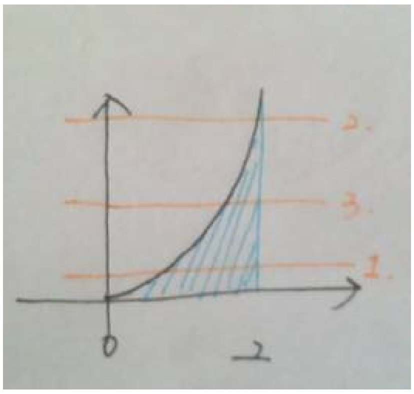
連續函數值的平均

單維彰・2013 年 4 月

積分在統計方面的應用其實是延伸了它的面積意涵，本節介紹平均值。

平均值是個大家很熟悉觀念，以前知道的是一個有限的數列的平均值：給定一個數列 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是，它們的**平均值**是 $\mu = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$；那是「離散」的平均值，現在我們討論「連續」的平均值。給定一個 $a \le x \le b$ 範圍內的連續函數 $f(x)$，它的平均值是什麼意思？要怎麼計算呢？

例如，考慮 $y = x^2$ 在 $0 \le x \le 2$ 範圍內「平均」是多少？觀察函數圖形，我們可以對「平均」一詞獲致直覺的意義。將 $y = f(x)$ 認作隨 x 變化的高度，如以下圖中的黑色曲線，若將黃色水平線的高度當作黑色曲線的「平均高度」，我們都可以根據直覺而指出，二號線太高了，一號線太低了，它們應該都不是「平均」。三號線看起來比較像。



數學家思考問題，其實都和經驗與直覺有關。我們根據對「平均」這個概念的直覺和經驗，做出以下數學定義。

連續函數的平均值

令 $f(x)$ 是一個在 $a \le x \le b$ 範圍內的連續函數，若某數 μ 滿足（在 $a \le x \le b$ 範圍內）

【高為 μ 的長方形面積】＝【 $y = f(x)$ 的曲線下面積】

則稱 μ 是 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 內的**平均值**。以上觀念的數學定義為

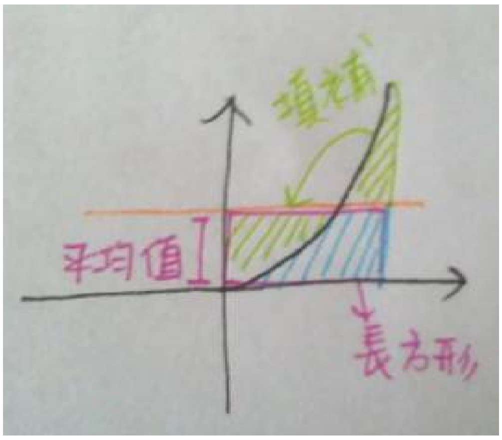
$$\mu \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx \text{，}$$

故 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 內的平均值為 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ 。

根據以上定義，再以 $0 \le x \le 2$ 範圍內的 $f(x) = x^2$ 為例，其平均值為

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$ 。

再觀察圖形，水平線以下的長方形面積等於 $y = x^2$ 的曲線下面積（在 $0 \le x \le 2$ 範圍內）。我們也可以說，$y = x^2$ 超過（平均值）水平線的面積，恰可挪下來填滿不足水平線的空缺，如下圖。



另一個與舊經驗的連結是，「離散」的平均數滿足

$\mu \times n = a_1 + a_2 + ... + a_n$，亦即 平均值 × 數量 = 總和 。

在「連續」的情況下，「總和」變成了 $\int_a^b f(x)\,dx$，而「數量」變成了區間的寬度 $b-a$。還是有同樣的關係：

$\mu \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$，亦即 平均值 × 數量 = 總和 。