代換積分法

單維彰・2015 年 5 月

雖然積分可以用電腦做，但一部份簡單的基本動作還是應該能夠手算，甚至心算。具備計算能力，並不是為了跟電腦比聰明或是比快速—那是沒有意義的較量，就好像沒有人會跟摩托車比賽跑—而是為了「流暢性」，而是能夠流暢地思考的能力。除了如多項式一般可以直接代公式的積分以外，最基本的積分操作，就是代換積分法。

代換積分法可謂微分連鎖律的反運算。例如

$$\frac{d}{dx}(2x-3)^3$$

可以令 $u=2x-3$，於是原微分式就成為

$$\frac{d}{dx}u^3=\left(\frac{d}{du}u^3\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

也就得到 $3u^2\cdot 2=6(2x-3)^2$。反過來，如果要計算

$$\int 6(2x-3)^2\,dx$$

同樣令 $u=2x-3$，則 $6(2x-3)^2=3u^2\cdot 2$，其中 $2=\dfrac{du}{dx}$，所以原積分式就成為

$$\int 3u^2\cdot 2dx=\int 3u^2\cdot\frac{du}{dx}dx$$

相當於把萊布尼茲符號的分式 $\dfrac{du}{dx}dx$ 化簡為 du，則上述積分式就成了

$$\int 3u^2du$$

只要用基本公式就得到 u^3+C，也就是 $(2x-3)^3+C$。

現在，我們從積分式出發，再表現一次代換積分法的程序。考慮

$$\int 6(2x-3)^2\,dx$$

令 $u=2x-3$，則 $\dfrac{du}{dx}=2$，改寫成 $du=2dx$，那麼就可以把積分式裡面的 $2dx$ 代換成 du 如下：

$$\int 6(2x-3)^2dx=\int 3(2x-3)^2\cdot 2dx=\int 3(2x-3)^2du$$

再把 $(2x-3)^2$「代換」成 u^2，就成了 $\int 3u^2du$，得到 u^3+C。但是原來的積分要的

是以 x 為變數的函數，所以再將 u^3「代換」回來 $(2x-3)^3$，就得到

$$\int 6(2x-3)^2\,dx=(2x-3)^3+C$$

一般而言，代換積分法的策略就是觀察 $\int f(x)\,dx$ 裡面的 $f(x)$，可否找到一個 $u=u(x)$ 使得 $f(x)=g(u)\cdot u'$？如果找得到，則

$$\int f(x)\,dx=\int g(u)\cdot\frac{du}{dx}\,dx=\int g(u)\,dx$$

當然，如果 $\int g(u)\,du$ 比 $\int f(x)\,dx$ 簡單，才值得花這番功夫。

舉例來說，考慮

$$\int (7-6x)^3 dx$$

其實我們別無選擇，只能試試看 $u=7-6x$，而 $u'=-6$，所以原來的被積分函數可以改寫成

$$(7-6x)^3=-\frac{1}{6}(7-6x)^3\cdot u'$$

也就是 $g(u)=-\frac{1}{6}u^3$。令 $u=7-6x$，則原積分式可做以下計算：

$$\int (7-6x)^3 dx=-\frac{1}{6}\int u^3\cdot(-6)dx=-\frac{1}{6}\int u^3 du=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}u^4\right)+C=-\frac{(7-6x)^4}{24}+C$$

我們可以用微分來驗算：

$$\left[-\frac{(7-6x)^4}{24}+C\right]'=\left(-\frac{4(7-6x)^3}{24}\right)\cdot[7-6x]' \qquad \text{這一步就是微分連鎖律}$$

$$=\left(-\frac{4(7-6x)^3}{24}\right)\cdot(-6)=(7-6x)^3 \qquad \text{驗算成功}$$

再示範一個例子 $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$。這時候，一個看起來值得嘗試的代換，是將根號裡面的式子，換成一個變數，也就是令 $u=x^2+3$，則 $u'=2x$，也就是 $du=2x\,dx$。所以

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+3}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$$

運用基本公式就得到 $\frac{1}{3}u^{3/2}+C$，也就是

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx=\frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2}+C$$

養成驗算的好習慣：

$$\left[\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C\right]'=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[x^2+3\right]'$$

$$=\left(\frac{1}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2x\right)=x\sqrt{x^2+3}$$

驗算成功。