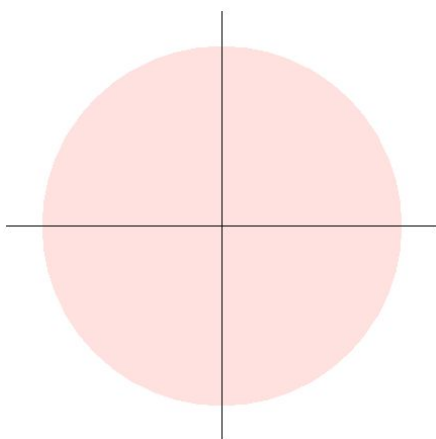


圓的面積

單維彰・2015 年 3 月

給定一個正數 r ，方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ 的圖形是圓心在原點且半徑為 r 的圓。以前我們不太注意分辨「圓周」和「圓盤」，「圓」有時候是指「圓周」，有時候卻指「圓盤」。詳細地說， $x^2 + y^2 = r^2$ 的圖形是圓周，而 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 的圖形是圓盤。現在我們要用積分方法求 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 的面積。

以下淺紅色圓盤表示欲求的面積。



現在，我們要將圓盤理解為：由半徑介於 0 和 r 之間的所有圓所組成。如右圖之系列，每個紅色的圓周是半徑為 x 的圓，其中 $0 < x < r$ 。

對任一 x ，其中 $0 \leq x \leq r$ ，以 x 為半徑的圓有以下數值：

$$\text{周長} = 2\pi x$$

$$\text{厚度} = dx$$

$$\text{面積} = 2\pi x dx$$

$$\text{總和} = \int_0^r 2\pi x dx \quad (x \text{ 從 } 0 \text{ 到 } r)$$

所以

$$\text{圓面積} = \int_0^r 2\pi x dx = \pi x^2 \Big|_0^r = \pi r^2$$

