

球的體積

單維彰 · 2015 年 4 月

球面方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

本節欲求實心球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ 的體積。對每一個 z_0 ，其中 $-r \leq z_0 \leq r$ ，高度為 z_0 的水平面與球的交集是一個圓盤，其方程式為

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2 - z_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\text{圓盤面積} = \pi(r^2 - z_0^2)$$

$$\text{圓盤體積} = \pi(r^2 - z_0^2) dz$$

從 $-r$ 到 r 的每個 z 薄片圓盤體積加在一起

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz \\ &= 2\pi \int_0^r \pi(r^2 - z^2) dz \\ &= 2\pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^r \\ &= 2\pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

所以半徑為 r 的球體積為 $\frac{4}{3} \pi r^3$ 。